

A KÖZPONTI STATISZTIKAI HIVATAL NÉPESSÉGTUDOMÁNYI KUTATÓ INTÉZETÉNEK
ÉS A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA DEMOGRÁFIAI BIZOTTSÁGÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

51.

KÖZPONTI STATISZTIKAI HIVATAL
Népességtudományi Kutató Intézet

Igazgató:
Monigl István

Irta:
Valkovics Emil

Lektorálták:
Dr. Bene Lajos
Kovacsicsné, Nagy Katalin

Dr. PONGRÁCZ Tibornénak tisztelettel és köszönettel
szemjével

Budapest, 1981. október 1-én

Hamori Emil

STABIL POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK NÉHÁNY ÚJONNAN FELTÁRT TULAJDONSÁGÁRÓL

BUDAPEST

1981/2.

TARTALOMJEGYZÉK

	Oldal
ELŐSZÓ	7
BEVEZETÉS	9
I. A STABIL NÉPESSÉG ELMÉLETÉNEK RÖVID ÁTTEKINTÉSE	13
1. Zárt népesség kialakulásának modellje	13
2. A stabil és a stacionér népesség főbb tulajdonságai	16
3. A stacionér népesség tulajdonságainak interdependenciája	18
4. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség tulajdonságainak interdependenciája	30
5. A reprodukció	38
6. A mindkét nembeli stabil népesség	59
7. A népességi modellek gyakorlati hasznosításának főbb területei	67
II. A STACIONÉR POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK DEMOGRÁFIAI JELLEMZŐI, VALAMINT DEMOGRÁFIAI ÉS GAZDASÁGI JELLEMZŐI KÖZÖTT FENNÁLLÓ KAPCSOLATOK ELSŐ MEGKÖZELÍTÉSE	89
1. A stacionér népesség kialakulásának feltételei és a stacionérrá váló népesség száma	89
2. A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzőinek az un. gazdasági halandósági táblák alapján megállapítható főbb összefüggései	92
3. A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzőinek az élveszületések, illetve a halálozások tetszőleges évi számának az alapulvételével becsült stacionér népességben kimutatható főbb összefüggései	97
4. A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzői az un. gazdasági halandósági táblák stacionér népességében és az élveszületések, illetve a halálozások tetszőleges évi számának az alapulvételével becsült stacionér népességekben kimutatható főbb összefüggéseinek kapcsolata	140
III. A STACIONÉR POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK DEMOGRÁFIAI JELLEMZŐI, VALAMINT A DEMOGRÁFIAI ÉS GAZDASÁGI JELLEMZŐI KÖZÖTT FENNÁLLÓ KAPCSOLATOK KÖRÉNEK KIBŐVÍTÉSE A MÁR LEÉLT ÉS A MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁNAK AZ EGYENLŐSÉGÉRE VONATKOZÓ TÉTEL ALAPJÁN	143
1. A stacionér népesség ismert tulajdonságai kohorsz szemlélet alapján történő meghatározásának matematikai megfogalmazása	143
2. A stacionér népesség átlagos életkorának és átlagos halálozási korának meghatározása a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt és az általa még leéleendő évek száma egyenlőségére vonatkozó tétel alapján	165

3. A stacionér népesség tulajdonságai között fennálló kapcsolatok körének kibővítése az átlagos életkorára vonatkozó különféle meghatározások alapján -----	186
4. Stacionér népességek statisztikai középértékekkel jellemezhető néhány további tulajdonságának ismert tulajdonságaik változásával együttjáró módosulása ----	200
5. A stacionér szubpopulációk és a stacionér gazdálkodást folytató stacionér népesség gazdasági jellemzőinek kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása -----	242
6. A stacionér népesség által már leélt és az általa még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó tétel alkalmazásának lehetőségei a stacionér populációk és szubpopulációk demográfiai jellemzői, valamint demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatok körének a kibővítésére -----	256
7. A stacionér szubpopulációk számának néhány meghatározási lehetősége az általuk már leélt és az általuk még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó speciális tételek alapján. E tételekből adódó néhány további összefüggés és következtetés -----	268
8. A bemutatott összefüggések illusztrálása a halandósági szint, a nettó reprodukciós együttható egységnyi értékét biztosító termékenységi szint és a gazdasági aktivitás, illetve inaktivitás korszpecifikus arányszámai állandósulása esetén kialakuló hipotetikus stacionér populációk és szubpopulációk alapulvételével --	279
 IV. A STABIL NÖVEKVŐ, ILLETVE CSÖKKENŐ POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK DEMOGRÁFIAI JELLEMZŐI, VALAMINT DEMOGRÁFIAI ÉS GAZDASÁGI JELLEMZŐI KÖZÖTT FENNÁLLÓ FŐBB KAPCSOLATOK -----	293
1. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség ismert tulajdonságai kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása -----	293
2. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkorának kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése -----	310
3. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség nyers születési és halálozási arányszámának kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése -----	333
4. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség meghaltjai átlagos életkorának kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése -----	337
5. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség gyermekei megszületésekor átlagos életkorának kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése -----	341
6. A bemutatott összefüggések kibővítésének lehetősége a leélt évek, illetve a népmozgalmi események "transzverzális naptárának" a bevezetése által ----	345
7. A bemutatott összefüggések alkalmazásának feltételei és módszere temetőfeltárások eredményei alapján végzett népességrekonstrukciók során -----	352
8. A népmozgalmi és a gazdasági események, valamint a különféle szubpopulációk un. stabil korfái alapján megállapítható főbb összefüggések -----	374
9. A bemutatott összefüggések illusztrálása a halandósági szint, a termékenységi szint és a gazdasági aktivitás, illetve inaktivitás korszpecifikus arányszámai állandósulása esetén kialakuló hipotetikus stabil populációk és szubpopulációk alapulvételével -----	380
 ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK -----	388
 IRODALOM -----	390
 TÁBLÁK JEGYZÉKE -----	395
 ÁBRÁK JEGYZÉKE -----	397

ELŐSZÓ

A stabil népességi modell kidolgozásának és alkalmazásának nagy gyakorlati jelentőségét napjainkban már senki sem vonja kétségbe. Míg századunk első felében a stabil népesség és az ez utóbbi specifikus esetét képező stacionér népesség elméletének a távoli múltban fellelhető elméleti előzményektől független ujraszületése és viszonylag gyors fejlődése egy csaknem kizárólag elméleti jelentőségű problematikában való előrehaladásnak számított, századunk második felében a kvázi-stabil, a félig-stabil stb. népességek teóriájának a megjelenése világossá tette ennek a ma már népesség-matematika néven nyilvántartott kutatási ágak a roppant gyakorlati jelentőségét is.

Köztudott, hogy a népességi modellek elméletével, gyakorlati felhasználási lehetőségeivel és módjaival több külföldi szerzőtől származó értékes kézikönyv foglalkozik, melyek felsorolása számos, a tárgykörrel foglalkozó bibliográfiában megtalálható. A magyar népességtudományi szakirodalomban elsősorban dr. Barsy Gyula és dr. Theiss Ede kétségbevonhatatlan szakmai kompetenciára utaló, idevágó munkásságát kell megemlítenünk, melynek főbb eredményei egyes fejezetek és fejezettöredékek formájában megtalálhatók a dr. Szabady Egon által szerkesztett "Bevezetés a demográfiába" című, a Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó által 1963-ban kiadott kézikönyvben is. Kétségtelenül figyelmet érdemel azonban dr. Vincze Istvánnak "Megjegyzések a népesség számszerű alakulásának vizsgálatáról" című, a "Demográfia" 1963. évi 2. számában megjelent értékes tanulmánya és Tekse Kálmán "Bevezetés a stabil népesség elméletébe" című, a Statisztikai Kiadó Vállalat által 1975-ben kiadott magas színvonalu monográfiája, valamint ezen értekezés szerzőjének "Gazdaságdemográfiai módszerek" című, a Tankönyvkiadó által 1973-ban kiadott, és "A gazdaságdemográfiai elemzés elvei és módszerei" című, a Tankönyvkiadó által 1976-ban kiadott egyetemi jegyzete is. Ez utóbbiakban található néhány, az ezen értekezés által tárgyalt kérdéskörrel kapcsolatos fejtegetés is.

A népességi modellek gyakorlati alkalmazási lehetőségei közül a népesség reprodukciója alakulásának az elemzésére való felhasználhatóságuk a legismertebb; köztudott, hogy milyen jelentős volt ezzel kapcsolatos szerepük hazánk népesedési helyzetének a fel-tárásában, és jelenleg is érvényben levő népességpolitikánknek a kialakításában.

A népességi modellek gyakorlati felhasználási területei közül azonban - mint ismeretes - világviszonylatban talán napjainkban annak van a legnagyobb jelentősége, hogy

segítségükkel megismerhetők, illetve korrigálhatók a hiányos, illetve hibás népességstatisztikai megfigyelésekkel és adatokkal rendelkező, földünk népességének nagy többségét kitevő ún. fejlődő országok legtöbbször kvázi-, illetve félig-stabil népességének a demográfiai jellemzői. Az ENSZ megbízásából a különböző fejlődő országokban tevékenykedő magyar demográfusaink a népességi modellekben rejlő eme lehetőséget igen gyakran és sikeresen hasznosították.

Ismeretes azonban, hogy a népességi modellek segítséget nyújthatnak a múltbeli népességfejlődés megismeréséhez, rekonstruálásához is. Ennek a lehetőségnek a kiaknázására számos hazai történeti demográfiai és paleodemográfiai kutatás szolgáltatott igen jó eredményeket produkáló alkalmat.

Elfogadottnak tekinthető a népességi modellek bizonyos kiválasztott ismérvek szempontjából optimálisnak tekinthető stabil népességeknek a meghatározására való felhasználása is.

A stabil szubpopulációk tulajdonságainak, valamint ez utóbbiak és a stabil össznépesség tulajdonságai közötti kapcsolatoknak a vizsgálata ezen értekezés szerzőjének egyik viszonylag régi kutatási témája, s ennek a kutatásnak az eredményeiről ebben az értekezésben számol be első alkalommal. Az értekezésben azonban jelentős helyet foglal el a stabil (és a stacionér) népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak az elméleti vizsgálata is. A modell-népességek demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak a vizsgálata a szerzőnek szintén egyik fő kutatási témája, e témával kapcsolatos kutatási eredményeinek egy-egy részletét azonban már korábban is publikálta. Ebben az értekezésben - többek között - e téren végzett eddigi kutatásainak az összegezését nyújtja anélkül, hogy a téma vizsgálatát részéről véglegesen lezártak nyilvánítaná.

A szerzőnek meggyőződése, hogy a népességi modellek elméletének és a népességszámszámítás és gazdasági jelenségek közötti kapcsolatok kutatásának napjainkban is tapasztalható gyors fejlődése számos további eredményt fog produkálni már a közeli jövőben ezen a téren is.

A szerző

BEVEZETÉS

Az értekezésnek a stabil népességek és alnépességek ismert tulajdonságai újabb tulajdonságokkal való kiegészítésének, a már ismert és az újonnan feltárt tulajdonságok közötti kapcsolatoknak, valamint a csak az újonnan feltárt tulajdonságok közötti kapcsolatoknak az elemzése képezi a fő célját. Kétségbevonhatatlan tematikai rokonsága folytán ennek a célnak a megvalósításához tartozik azonban a nem csupán valamely demográfiai ismérv (pl. családi állapot), hanem a különböző gazdasági természetű ismérvek alapján kialakítható stabil szubpopulációk (alnépességek) tulajdonságainak, valamint ez utóbbiak és a stabil össznépeség tulajdonságai közötti kapcsolatoknak a vizsgálata is, ezért a szerző e két problematikát - éppen tematikai rokonságuknak a kimutatása céljából - egymással párhuzamba állítva tárgyalja.

Értekezésünk nem demográfus olvasóit feltehetően a stabil népességek demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolataira irányuló elemzéseink fogják nagyobb mértékben érdekelni, ezért e bevezető jellegű eszmefuttatásban elsősorban ennek a kutatási iránynak a főbb előzményeiről, hazai történetéről kívánunk rövid áttekintést nyújtani.

A demográfiai és a gazdasági jellemzők közötti összefüggéseknek a modell-népességek alapulvételével történő vizsgálata két kutatási irány szerves összekapcsolását tételezi fel.

Az egyik kutatási irány az elméleti demográfiának a modell-népességekkel (illetve népességi modellekkel) foglalkozó ága, mely népesség-matematika néven napjainkban is igen gyorsan fejlődik, és gyakorlati felhasználási területeinek az állandó bővülése folytán egyre nagyobb jelentőségre tesz szert. Ennek a kutatási iránynak a főbb eredményeit több kiváló magyar demográfusnak - dr. Barsy Gyulának, dr. Theiss Edének, dr. Vincze István-nak, Tekse Kálmánnak - a kétségbevonhatatlan szakmai kompetenciával megírt munkái (1, 2, 3) alapján is tanulmányozhatjuk. Ezekről az eredményekről a felsőbb matematikában való jártasságot nem igénylő rövid áttekintést nyújt ezen értekezés első fejezete is a további fejezetek mondanivalója megértésének a megkönnyítése céljából.

A másik kutatási irány a gazdaságdemográfiának az az ága, amely azt vizsgálja, hogyan befolyásolják a népesedési jelenségek a gazdasági élet különböző jelenségeit. A gazdaságdemográfia eme ágának a tartalmát lényegében a gazdasági események korfái módszertani apparátusának a felhasználásával végzett elemzések képezik; ezt a módszertani

apparátust fogjuk használni értekezésünk második, harmadik és negyedik fejezetének vonatkozó részeiben is.

A gazdasági események korfái - mint ismeretes - az egyes korévek (korcsoportok) népességének a gazdasági jellemzőit, illetve egy év alatti gazdasági teljesítményeit mutatják be, írják le. Becslésük többnyire a gazdasági események korszpecifikus intenzitásainak, illetve korszpecifikus évi nagyságainak a vonatkozó korévek (korcsoportok) népessége évközepe számával való szorzása útján történik.

Magyarország Központi Statisztikai Hivatalának Népeségtudományi Kutató Intézetében először a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív népesség, a munkaidő és a nem munkaidő (szabadidő), a termelés és a fogyasztás, valamint a termelési többlet és a fogyasztási többlet korfáit számítottuk ki e jelenségek 1959-1960. évi korszpecifikus intenzitásainak, illetve nagyságainak, és az 1960. január 1-i népszámlálás vonatkozó adatainak a felhasználásával. Az elmúlt évek folyamán megjelent különböző publikációk (4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11) részletesen bemutatták e korfák kidolgozásának és felhasználásának a módszereit; ez alkalommal - értekezésünk ezzel kapcsolatos mondanivalójának megkönnyítése céljából - csupán azokat a főbb elemzési területeket soroljuk fel, melyekben a gazdasági események demográfiai meghatározottságának elemzése terén e módszer felhasználásával már eddig is a legtovább sikerült eljutnunk.

Ezek a főbb analitikai felhasználási területek a következők voltak:

A gazdasági események csupán egy időszakra vonatkozó korfáinak birtokában kiszámítható volt, hogy mi volt a szerepe a különböző gazdasági események adott időszak alatti volumenének létrehozásában az egyes korévek (korcsoportok) népességének, hogy pl. azoknak a koréveknek (korcsoportoknak) a népessége járult-e hozzá a különböző gazdasági események adott időszak alatti volumenének a létrehozásához a legnagyobb (a legkisebb) arányban, melyek létszáma, illetve az össznépességen belüli aránya a legnagyobb (a legkisebb) volt, vagy pedig azoké, melyekben a gazdasági események egy lakosra vonatkoztatott nagysága volt a legnagyobb (a legkisebb) stb. Az egyes korévek (korcsoportok) népessége az össznépességen belüli aránya szerinti sorrendjének, a gazdasági események az adott időszak alatti volumenéhez való hozzájárulási aránya szerinti sorrendjének és a gazdasági események egy főre jutó nagysága szerinti sorrendjének a párhuzamba állítása képezte ez irányú vizsgálatainknak előfeltételét.

A megfelelő adatok rendelkezésre állása esetén a gazdasági korfák módszerével viszonylag könnyen kiszámítható volt, hogy milyen szerepet töltött be a gazdasági események valamely időszak alatti abszolút nagyságának alakulásában a népességnek a vonatkozó időszakot megelőző mintegy száz év alatti termékenysége, halandósága és vándormozgalma.

Az előző bekezdésben jelzett számítás folytatásaként felmérhetővé vált, hogy mekkora volt valamely időszak alatt a gazdasági események az időszakot megelőző mintegy száz év alatti termékenységből, halandóságból és vándormozgalomból adódó "vesztése" (ama

feltételezés alapján, hogy a népmozgalmi jelenségek a ténylegesnél kedvezőbben alakultak), illetve "nyeresége" (ama feltételezés alapján, hogy a népmozgalmi jelenségek a ténylegesnél kedvezőtlenebbül alakultak) stb.

A szóban forgó módszerrel felmérhetővé vált a gazdasági események korszpecifikus intenzitásait, illetve nagyságait meghatározó tényezőknek (a gazdasági aktivitás állapotában eltöltött idő nagyságának, az iskolázottsági, illetve a szakképzettségi színvonalnak stb.) a gazdasági események valamely időszak alatti abszolút nagyságának a kialakításában betöltött szerepe, és az, hogy milyen irányban és mértékben befolyásolta ez utóbbit a gazdasági eseményeknek az egyes generációkban megfigyelhető, egy főre jutó élettartam alatti végső össznagyságának és ez utóbbi életkor szerinti megoszlásának (naptárának) alakulása stb.

Kiszámíthatókká váltak a korszpecifikus intenzitások, illetve nagyságok - adott és valamely elméleti feltételezés szerinti nagyságainak alapulvételével - az ezen intenzitásokból, illetve nagyságokból eredő gazdasági "nyereségek", illetve "veszteségek" is.

Legalább két időszakra - és természetesen több időszakra - kiszámított gazdasági korfák esetében is a standardizálás módszerének felhasználásával felmérhetővé vált a népesség számának, korösszetételének és a gazdasági események korszpecifikus intenzitásainak, illetve nagyságainak hatása ezen események valamely időszak alatti abszolút nagyságára külön-külön is (vagy csak két tényező külön) a másik két tényező (illetve a harmadik tényező) változatlanságának feltételezésével.

A szóban forgó módszerrel volt elvégezhető viszonylag a legegyszerűbben a gazdasági események valamely jövőbeni időszak alatti abszolút nagyságának, az ezen eseményeket produkáló népesség életkora szerinti megoszlásának stb. előrebecslése is.

Fontos elemzési célokat szolgált már korábbi vizsgálataink során is a gazdasági korfák különböző, ún. stacionér változatainak a kiszámítása is. Ezzel kapcsolatban születtek meg az ún. gazdasági halandósági táblák, és ez utóbbiak felhasználásával vált lehetségessé a gazdasági életrajz kidolgozása, a munkatermelékenység táblamódszerű elemzése, az átlagos élettartam egy éve különböző (munkaidőben, termelt értékben, a termelési többlet értékében kifejezett) árainak kiszámítása, a felneveltetési költségek halandóságból adódó veszteségeinek a becslése stb. Az ún. halálloki gazdasági halandósági táblák többek közt annak felmérését tették lehetővé, hogy milyen hatással lenne a gazdasági események élettartam alatti nagyságainak alakulására az egyes halállokok feltételezett kiküszöbölése.

További elemzési célokat szolgált, és viszonylag könnyen volt megvalósítható - mint látni fogjuk - a gazdasági események ún. stabil korfáinak kiszámítása is. Ezek segítségével volt elvégezhető például annak vizsgálata, hogy miként befolyásolja a népesség reprodukciója a gazdasági események reprodukcióját.

Felhasználható volt a gazdasági korfák módszertani apparátusa a népességgpolitika célkitűzéseinek kialakítására, vagyis annak az eldöntésére is, hogy a különböző, állandó

korösszetételű (stabil) népességek közül melyik az, amelyik a gazdaságilag aktív népesség aránya, az egy lakosra jutó termelés, fogyasztás és termelési többlet, a munka termelékenysége stb. maximumának, a gazdaságilag inaktív népesség fogyasztása egy gazdaságilag aktív személyre jutó nagysága minimumának stb. biztosítása szempontjából a legkedvezőbb.

A gazdasági korfák segítségével végzett vizsgálatok vetették fel számos, széleskörűen alkalmazott gazdaságstatisztikai mutató, pl. az egy főre jutó évi termelés és fogyasztás, az egy gazdaságilag aktív személyre jutó évi termelés stb. mutatója, és az ezek segítségével végzett gazdaságdemográfiai elemzések kritikai ujjáértékelése szükségességének gondolatát is, aminek elsősorban a szóbanforgó mutatók értékének a népesség összetételétől való függése miatt van nagy jelentősége.

Értekezésünkben a stabil népesség elméletének rövid áttekintése után a demográfiai és a gazdasági jellemzőknek elsősorban a gazdasági események stacionár és stabil korfáinak segítségével feltárható összefüggéseit fogjuk eléggé részletesen - a téma kimerítésének igénye nélkül - megvizsgálni. Értekezésünknek elméleti rangját tekintve ezzel egyenértékű célja azonban - a stabil populációk és szubpopulációk néhány újabb tulajdonságának feltárásán túlmenően - a tisztán demográfiai ismérvek alapján kialakítható szubpopulációk tulajdonságainak, és ez utóbbiak és a stabil össznépesség tulajdonságai közötti kapcsolatoknak a részletes vizsgálata is, amivel a stabil népességek demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak a vizsgálata számos tekintetben mutat analógiát.

Értekezésünk e kettős célkitűzésének megvalósítását megelőzően - mint jeleztük - röviden, a teljesség igénye nélkül áttekintést adunk a stabil népesség általános elméletéről is. Értekezésünknek ezen első fejezetében, mint ahogyan a továbbiakban is, a matematikailag is megfogalmazható megállapításokat matematikailag diszkrét formában fogjuk felírni és tárgyalni. A matematikailag diszkrét megfogalmazási mód sokak számára fog hozzáférhetőbbé tenni viszonylag nehezen érthető bizonyításokat és nem könnyen belátható következtetéseket is. Reméljük ezért, hogy mondanivalónk matematikai tárgyalási módja nem megy a nem matematikus olvasók általi érthetőség rovására.

I. A STABIL NÉPESSÉG ELMÉLETÉNEK RÖVID ÁTTEKINTÉSE

1. Zárt népesség kialakulásának modellje

A stabil népesség elmélete megértésének megkönnyítése céljából vizsgáljuk meg, hogy mely tényezők és hogyan befolyásolják a népesség valamely időpontban megfigyelhető számának és korösszetételének, illetve a különböző korévek (korcsoportok) népessége valamely időpontban megfigyelhető számának kialakulását. Nyílt népesség, vagyis olyan népesség esetében, melyből kivándorolnak és melybe bevándorolnak - a népesség valamely időpontban megfigyelhető számát és korösszetételét közvetlenül három tényező határozza meg: a termékenység, a halandóság és a vándorlások a megfigyelés időpontját megelőző mintegy száz év alatti alakulása. Zárt népesség esetében - e népesség fogalmából adódóan - a vándorlások hatásával nem kell számolnunk. Tételezzük fel - az egyszerűség kedvéért -, hogy zárt népességgel van dolgunk, és vizsgáljuk meg, hogy miként alakul ki egy zárt népesség a termékenység és a halandóság bizonyos jellemzőinek együttes hatására. A probléma áttekintésének megkönnyítése céljából induljunk ki a zárt népesség kialakulásának Roland Pressat francia demográfustól származó, mellékelt sémájából (lásd I. 1. ábra)*.

A megfigyelés t -vel jelzett időpontjában bizonyos számú 0 éves, 1 éves, 2 éves ..., i éves személyt találunk, illetve olvasunk le a népesség korfájáról, s a népesség összlétszámát (P) úgy kapjuk meg, hogy a különböző korúak számát összegezzük:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_i + \dots = \sum_{x=0}^{\omega} P_x,$$

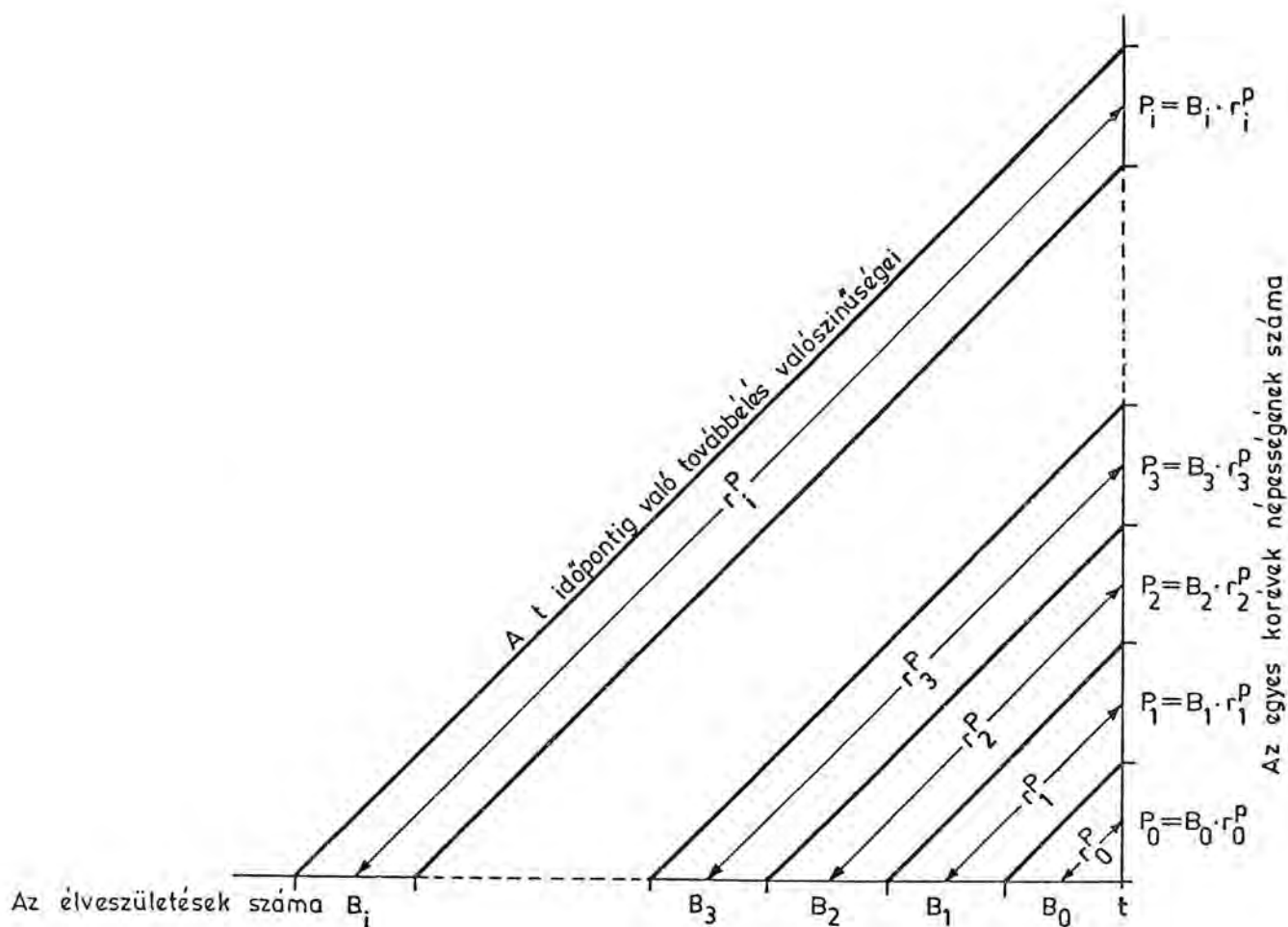
ahol P_x az x éves korúak számát jelöli általában. Mitől függ a különböző korúak száma? Zárt népességben - mint jeleztük - csupán két tényezőtől:

1. születéskori számuktól, vagyis - többek között - a népességnek a megfigyelés időpontját megelőző termékenységétől és

* Roland Pressat: Principes d'analyse. Éditions de l'Institut National d'Études Démographiques. 1966. 92. p. (12) és Roland Pressat: L'analyse démographique. Méthodes, résultats, applications. Deuxième édition entièrement refondue. P.U.F., 1969. 231. p. (13).

2. a megfigyelés időpontjáig való továbbélésük valószínűségétől, vagyis a népességnek a megfigyelés időpontját megelőző halandóságától. A 0 évesek száma pl. nem más, mint a megfigyelés időpontját megelőző első év alatt születetteknek (B_0), az 1 évesek száma a megfigyelés időpontját megelőző második év alatt születetteknek (B_1) stb. a megfigyelés időpontjáig továbbélő része. Amennyiben a megfigyelés időpontját megelőző első év alatt születetteknek (B_0) a megfigyelés időpontjáig való továbbélési valószínűségét az r_0^p szimbólummal, a szóban forgó időpontot megelőző második év alatt születetteknek (B_1) ezen idő-

I. 1. ZÁRT NÉPESSÉG KIALAKULÁSÁNAK SÉMÁJA



pontig való továbbélési valószínűségét az r_1^p szimbólummal stb. jelöljük, a különböző korok számát a megfelelő születésszámok és továbbélési valószínűségek alábbi szorzatai formájában írhatjuk fel:

$$P_0 = B_0 \cdot r_0^p$$

$$P_1 = B_1 \cdot r_1^p$$

$$P_2 = B_2 \cdot r_2^p$$

$$P_3 = B_3 \cdot r_3^p$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$P_i = B_i \cdot r_i^p$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

Könnyen belátható, hogy a különböző koruak száma valamely zárt népességben csak akkor lenne egyenlő születéskori létszámukkal, ha halandóság nem létezne, vagyis a megfigyelés időpontjáig való továbbélés valószínűségei egyenlők lennének eggyel. Mivel azonban halandóság létezik,

$$B_0 \cdot r_0^p < B_0$$

$$B_1 \cdot r_1^p < B_1$$

$$B_2 \cdot r_2^p < B_2$$

$$B_3 \cdot r_3^p < B_3$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$B_i \cdot r_i^p < B_i$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

$$\cdot$$

és általában

$$P = \sum_{x=0}^{\omega} B_x \cdot r_x^p < \sum_{x=0}^{\omega} B_x$$

Nyílt népességben - a vándorlások mérlegének alakulásától függően - a különböző koruak száma egyenlő is lehet, vagy nagyobb is lehet az adott területegységen a megfelelő idő alatt születettek számánál, a "továbbélési valószínűségek" értéke pedig elérheti, sőt meg is haladhatja az egyet, ebben az esetben azonban e valószínűségek már nem tekinthetők - ezért nem is nevezhetők - továbbélési valószínűségnek. Olyan nyílt népességben, melyből csak kivándorolnak, s amelybe ugyanakkor nem vándorolnak be, a valószínűségek a megfelelő idő alatt születettek adott területegységen való maradásának valószínűségei.

2. A stabil és stacionér népesség főbb tulajdonságai

A zárt népesség kialakulásának sémája alapján érthetők meg az un. modell-népességek, illetve népességi modellek: a stacionér, a stabil, a kvázi-stabil, a félig stabil stb. népességek sajátosságai is. A stabil népesség, és a stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népesség fogalma szintén annak vizsgálata során keletkezett, hogy miként alakul ki egy zárt népesség a termékenység és a halandóság bizonyos jellemzőinek együttes hatására. Míg azonban a valóságban igen gyakran e jellemzők időszakról-időszakra (pl. évről-évre) megfigyelhető, többé-kevésbé jelentős és többé-kevésbé szabálytalan változásaival kell számolnunk, a stabil népesség olyan népesség, mely akkor alakul ki, ha a termékenység és a halandóság korszecifikus jellemzői (arányszámai) állandósulnak.

A stabil népesség

- nyers születési arányszáma állandó;
- nyers halálozási arányszáma állandó;
- nyers születési és halálozási arányszámának különbségét jelentő természetes szaporodási, ill. fogyási arányszáma állandó, vagyis a népesség száma időszakról-időszakra (pl. évről-évre) ugyanolyan arányban változik;
- nyers születési, halálozási és természetes szaporodási, illetve fogyási arányszámának változatlansága folytán a születések és a halálozások száma időszakról-időszakra (pl. évről-évre) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint a népesség száma;
- korösszetétele állandó;
- korszecifikus termékenységi arányszámai és korösszetétele változatlansága folytán a születéseknek az anyák életkora szerinti megoszlása is állandó;
- korszecifikus halálozási arányszámai és korösszetétele változatlansága folytán a halálozások kormegoszlása is állandó.

A stabil népesség lehet stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népesség a természetes szaporodás, illetve fogyás arányszámának előjelétől függően. Ezt az arányszámot a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinsic arányszámának nevezzük, és r -rel jelöljük. Egyes szerzők a stabil népesség születési arányszámát intrinsic születési arányszámnak, halálozási arányszámát pedig intrinsic halálozási arányszámnak nevezik. Amennyiben a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinsic arányszáma $r=0$, stacionér népességgel van dolgunk, melynek

- nyers születési arányszáma állandó és egyenlő nyers halálozási arányszámával;
- nyers halálozási arányszáma állandó és egyenlő nyers születési arányszámával;

- nyers születési és halálozási arányszámának különbsége, vagyis a természetes szaporodási, illetve fogyási arányszáma állandó és egyenlő 0-val, vagyis a népesség száma időben változatlan;
- nyers születési és halálozási arányszáma, valamint létszáma változatlansága következtében jellemzője az is, hogy a születések és a halálozások száma szintén változatlan;
- korösszetétele állandó, és állandó benne az egyes korévek (korcsoportok) népességének abszolút száma is;
- korszpecifikus termékenységi arányszámai és az egyes korévek (korcsoportok) népessége abszolút számának változatlansága következtében tulajdonsága az is, hogy benne a születéseknek az anyák kora szerinti megoszlása és az egyes korévek (korcsoportok) női népessége által szült gyermekeknek az abszolút száma is állandó;
- korszpecifikus halálozási arányszámai és az egyes korévek (korcsoportok) népessége abszolút számának változatlansága következtében sajátossága az is, hogy benne a halálozások kormegoszlása és az egyes korévek (korcsoportok) népessége halálozásainak abszolút száma is állandó.

A stabil népesség és a stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népesség felsorolt tulajdonságai - mint bizonyítani fogjuk - egymással szorosan összefüggenek, kölcsönösen feltételezik egymást. A stabil népesség elmélete távoli előfutárának Leonard Euler, a svájci származású kiváló matematikus tekintendő, aki már egy 1760-ban publikált tanulmányában^{*} megállapította, hogy amennyiben a halandóságra vonatkozó különböző hipotézisekből kiindulva a természetes szaporodás több intrinszc arányszámának alapulvételével kiszámítjuk a megfelelő születési arányszámokat, illetve ez utóbbiak reciprokait, és számításaink eredményeit táblázatokba foglaljuk, akkor könnyen bebizonyíthatjuk a fordított összefüggést is, hogy ti. a születési arányszámok, illetve ez utóbbiak reciprokai meghatározzák az össznépesség egy bizonyos évi növekedési arányát, mely azonos a születések száma évi növekedésének arányával. Euler e több mint 210 évvel ezelőtti sejtésétől függetlenül, és e sejtésről feltehetően mit sem tudva, a stabil népesség elméletét klasszikus formájában Alfred J. Lotka európai származású amerikai demográfus dolgozta ki és fejtette ki 1907-1949-ig (halála évéig) publikált mintegy 30, részben egyedül, részben társszerzésben írott tanulmányában^{**}, és 1939-ben francia nyelven publikált kétkötetes könyvében.^{***}

^{*} -----
^{*} Leonard Euler: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. In: Histoire de l'Académie Royal des Sciences et Belles Lettres, 1760. 144-164. p. (14).

^{**} E tanulmányok közül a legismertebbek: A.J. Lotka: Relation between Birth Rates and Death Rates. Science, N. S. Vol. 26 (1907), No. 653, 21-22. p. (15). - F.R. Sharpe - A.J. Lotka: A Problem in Age-Distribution. Philosophical Magazine, April 1911, 435-438. p. (16). - A.J. Lotka: Elements of physical biology. Baltimore, 1925, p. (17).

^{***} A.J. Lotka: Théorie analytique des associations biologiques Paris, Hermann et Cie, 1939, (18).

Meg kell említenünk az elmélet kidolgozásával kapcsolatban Ludwig von Bortkiewicz berlini statisztikus 1911-ben publikált munkáját is.* Az elmélet továbbfejlesztőiről: a kvázi-stabil és a félig-stabil népességek elméletének kidolgozóiról később teszünk említést.

Tekintsük át ezután matematikailag - a zárt népesség kialakulásának sémájához visszatérve - a stabil népesség legegyszerűbb esetét képező stacionér népesség tulajdonságait.

3. A stacionér népesség tulajdonságainak interdependenciája

Stacionér népességben - mint említettük - a születések száma időszakról-időszakra (pl. évről-évre) ugyanakkora, időben változatlan, vagyis

$$B_0 = B_1 = B_2 = B_3 = \dots = B_i \dots = B.$$

Változatlanok a különböző időszakok (pl. évek) alatt születetteknek a megfigyelés időpontjáig való továbbélési valószínűségei is, vagyis változatlan minden un. születési kohorsz kihalási, illetve továbbélési rendje és halandósági táblája minden egyéb mutatójának az értéke is. A halálozások száma (D) egyébként időben szintén változatlan és - mint említettük - azonos a születések számával, különbségük tehát zérus:

$$D_0 = D_1 = D_2 = D_3 = \dots = D_i = \dots = D = B$$

$$D - B = 0$$

A stacionér népesség időben szintén változatlan létszáma

$$P = B r_0^P + B r_1^P + B r_2^P + B r_3^P + \dots + B r_i^P + \dots = B \sum_0^{\omega} r_x^P,$$

vagy

$$P = D r_0^P + D r_1^P + D r_2^P + D r_3^P + \dots + D r_i^P + \dots = D \sum_0^{\omega} r_x^P,$$

vagyis a stacionér népesség létszámát úgy kapjuk meg, hogy a születések, illetve halálozások időben változatlan és egymással azonos nagyságú évi számát megszorozzuk a továbbélési valószínűségeknek az összegével.

Mit fejez ki valamely stacionér népességben a továbbélési valószínűségek összege? E valószínűségek a különböző koruak számának ama születési kohorszok létszámához viszonyított arányai, melyekből a megfigyelés időpontjáig továbbélők származnak, vagyis

* Ludwig v. Bortkiewicz: Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der Stacionären und in der Progressiven Bevölkerung, zugleich ein Beitrag zur Frage der Berechnung der "Verlebten Zeit". Bulletin de l'Institut International de Statistique, 1911, vol. XIX, Part, II, 63-138. p. (19).

$$r_o^p = \frac{P_o}{B_o}$$

$$r_1^p = \frac{P_1}{B_1}$$

$$r_2^p = \frac{P_2}{B_2}$$

$$r_3^p = \frac{P_3}{B_3}$$

.

.

.

$$r_i^p = \frac{P_i}{B_i}$$

.

.

.

Olyan népességben azonban, melyben a születések száma időben változatlan, és időben változatlanok a különböző születési évjáratok bármely időpontig, illetve bármely életkor eléréséig való továbbélési valószínűségei is - és a stacionér népesség esetében éppen ilyen népességgel van dolgunk -, a továbbélési valószínűségek a megfigyelés időpontjában különböző kort betöltött népesség számának a születések, illetve halálozások változatlan és egymással egyenlő évi számához viszonyított arányaiként is felfoghatók, vagyis:

$$r_o^p = \frac{P_o}{B} = \frac{P_o}{D}$$

$$r_1^p = \frac{P_1}{B} = \frac{P_1}{D}$$

$$r_2^p = \frac{P_2}{B} = \frac{P_2}{D}$$

$$r_3^p = \frac{P_3}{B} = \frac{P_3}{D}$$

.

.

.

$$r_i^p = \frac{P_i}{B} = \frac{P_i}{D}$$

.

.

.

Ez vonatkozik a halandósági táblák többi paraméterére is, ezért mondjuk, hogy stacionér népességben a különböző születési kohorszok történeti (longitudinális) halandó-

sági táblái azonosak a valamely megfigyelési időszak (pl. év) adatai alapján kiszámított, un. fiktív kohorszokra vonatkozó (transzverzális) halandósági tábláival.

A különböző kort betöltöttek számának valamely változatlannak vett születésszámhoz viszonyított arányát a már jól ismert, un. transzverzális halandósági táblákban is a továbbélési valószínűségek egy fajtájának tekintjük, és az L_x/l_0 hányadossal definiáljuk, melyben L_x a halandósági tábla stacionér népessége x -éves kort betöltött tagjainak a számát, l_0 pedig a tábla gyökét, vagyis a változatlannak vett évi születésszámot szimbolizálja, mely azonos a halálozások évi számával

$$(l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x).$$

Ismeretes továbbá, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{l_0} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{T_0}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{T_0}{l_0} = e_0^0,$$

vagyis a halandósági tábla e továbbélési valószínűségeinek összege az átlagos élettartammal (e_0^0) egyenlő, a stacionér népesség összlétszáma pedig a tábla gyökének (illetve a halálozások táblabeli számának) és a születéskor várható átlagos élettartam szorzataként is definiálható:

$$T_0 = l_0 \cdot e_0^0 = e_0^0 \cdot \sum_{x=0}^{\omega} d_x.$$

Ugyanígy bármely tetszőleges B születésszámu, illetve D halálozási számu stacionér népesség száma

$$P = B \cdot e_0^0 = D \cdot e_0^0 = e_0^0 \cdot \sum_{x=0}^{\omega} D_x.$$

A stacionér népesség száma tehát a születések évi számának és az átlagos élettartamnak, illetve a halálozások évi számának és az átlagos élettartamnak szorzatával egyenlő, más szavakkal: a stacionér népesség olyan népesség, melyben a születéskor várható átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, mint amennyi a népesség mindenkor i összlétszáma. Analógia: Ha egy iskolába évente százan iratkoznak be és a tanulmányi idő négy év, mely alatt a tanulók száma nem változik (vagyis sem halálozások, sem lemorzsolódás miatt nem csökken), akkor az évente végzők száma is száz fő lesz, az iskola tanulóinak mindenkor i összlétszáma pedig $4 \times 100 = 400$ főt fog kitenni, más szavakkal: az iskolába a tanulmányi idő négy éve alatt annyian fognak beiratkozni és annyian fogják ezalatt tanulmányaikat befejezni, mint amennyi az iskola tanulóinak mindenkor i összlétszáma.

A stacionér népesség létszámának meghatározására szolgáló fenti formulákból következik, hogy

$$e_o^o = \frac{P}{B} = \frac{P}{D} = \frac{P}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x},$$

vagyis a születéskor várható átlagos élettartam, illetve rövidebben: az átlagos élettartam annyi évet tesz ki, ahányszor a születések, illetve halálozások évi száma a népesség számában (illetve az újszülöttek által leélendő, vagy a meghaltak által leélt összes évek számában) bennfoglaltatik. (Vö. a halandósági táblák $e_o^o = T_o/l_o$ mutatójával.) Az átlagos élettartam ugyanakkor - mint láttuk - az újszülöttek által a különböző életkorok népességébe

való tartozás valószínűségeinek összegeként ($e_o^o = \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p$) is felfogható (vö. a halandósági táblák $e_o^o = \sum_{x=0}^{\omega} L_x/l_o$ mutatójával) és felfogható a stacionér népesség meghaltjai átlagos életkoraként is:

$$e_o^o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xD_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x},$$

ugyanis a nevezőben szereplő $\sum_{x=0}^{\omega} D_x = D = B$, a számlálóban szereplő $\sum_{x=0}^{\omega} xD_x$ pedig (a halálozásoknak az egyes koréveken belüli egyenletes megoszlása esetén):

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} xD_x &= 0,5 D_o + 1,5 D_1 + 2,5 D_2 + 3,5 D_3 + \dots = \\ &= 0,5 D_o \\ &+ 0,5 D_1 + D_1 \\ &+ 0,5 D_2 + D_2 + D_2 \\ &+ 0,5 D_3 + D_3 + D_3 + D_3 \end{aligned}$$

Ez oszloponként
összeadva:

$$0,5 \sum_{x=0}^0 D_x + \sum_{x=1}^1 D_x + \sum_{x=2}^2 D_x + \sum_{x=3}^3 D_x + \dots, \text{ vagyis}$$

$$e_o^o = \frac{0,5 \sum_{x=0}^0 D_x + \sum_{x=1}^1 D_x + \sum_{x=2}^2 D_x + \sum_{x=3}^3 D_x + \dots}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} =$$

$$= 0,5 + \frac{\sum_{x=1}^1 D_x + \sum_{x=2}^2 D_x + \sum_{x=3}^3 D_x + \dots}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{x=\omega}^0 D_x + \sum_{x=\omega}^1 D_x + \sum_{x=\omega}^2 D_x + \sum_{x=\omega}^3 D_x + \sum_{x=\omega}^4 D_x + \sum_{x=\omega}^5 D_x + \dots}{2} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_x}{2} = \\
&= \frac{P_0 + P_1 + P_2 + \dots}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} = \\
&= \frac{\sum_{x=\omega}^0 P_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} = \frac{\sum_{x=\omega}^0 P_x}{D} = \frac{\sum_{x=\omega}^0 P_x}{B} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{D} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p = \frac{P}{D} = \frac{P}{B} = e_o^o,
\end{aligned}$$

vagyis az átlagos élettartam a stacionér népesség meghaltjai - és csak a stacionér népesség meghaltjai! - átlagos életkoraként is felfogható (vö. a halandósági táblák

$$e_o^o = \sum_{x=\omega}^0 x d_x / \sum_{x=\omega}^0 d_x \text{ mutatójával).}^*$$

Az $e_o^o = P/B = P/d$ formulákból következik, hogy

$$B = D = \frac{P}{e_o^o} = \frac{\sum_{x=\omega}^0 x D_x}{e_o^o} \text{ stb. ,}$$

 * A demográfia történetében eddigi ismereteink szerint Edmund Halley angol asztronómus volt az első, aki 1693-ban publikált műve tanúsága szerint - tehát mintegy 30 évvel John Graunt 1662-ben közzétett első halandósági táblája után - ezt a tételt világosan felismerte. "An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind" című, a Philosophical Transactions of the Royal Society c. kiadvány 17. kötetében publikált, jelzett tanulmányában Breslau városának 1687-1691. évi halandósági tábláját mutatta be, mely a meghaltak kor-megoszlásából kiindulva az átlagos élettartamot a meghaltak átlagos életkoraként definiálta. Halley ezt azért tehette - s ennek tudatában volt -, mert Breslau korabeli népessége megközelítőleg stacionér volt, stacionér népességben pedig a halálozások tényleges kor-megoszlása azonos a halandósági tábla halálozásainak kor-megoszlásával, és a meghaltak tényleges átlagos életkora azonos a halandósági tábla meghaltjainak átlagos életkorával. Nem stacionér népességben azonban ez nincsen így, és azoknak a publikációknak, melyek nem stacionér népességek halandósági tábláját Halley módszerével kiszámítva közlik, nincsen jelentős tudományos értékük (20).

vagyis a stacionér népességben a születések és a halálozások egymással azonos évi száma annyi főt tesz ki, ahányszor az átlagos élettartam a népesség időben változatlan összlétszámában (illetve az újszülöttek által leélendő összes évek, vagy a meghaltak által leélt összes évek számában) benne foglaltatik. (Vö. a halandósági táblákból ismert

$$l_o = \sum_{x=0}^{\omega} d_x = T_o / e_o^o = \sum_{x=0}^{\omega} x d_x / e_o^o \text{ összefüggéssel,})$$

Az $e_o^o = P/B = P/d$ formulák alapján látható be legkönnyebben az is, hogy

$$\frac{B}{P} = \frac{D}{P} = \frac{1}{e_o^o} = b = d,$$

vagyis a stacionér népesség egymással azonos, nyers születési arányszáma (b) és nyers halálozási arányszáma (d) a születéskor várható átlagos élettartam inverzeként is felfogható (a halandósági táblák jelöléseit alkalmazva

$$l_o / T_o = \sum_{x=0}^{\omega} d_x / T_o = 1/e_o^o),$$

hogy maga az átlagos élettartam a nyers születési arányszám, illetve nyers halálozási arányszám inverzeként is értelmezhető:

$$e_o^o = \frac{1}{b} = \frac{1}{d},$$

s hogy a nyers születési arányszámnak és halálozási arányszámnak az átlagos élettartammal alkotott szorzata egyenlő eggyel:

$$b \cdot e_o^o = d \cdot e_o^o = \frac{B}{P} \cdot e_o^o = \frac{D}{P} \cdot e_o^o = \frac{P}{P} = \frac{e_o^o}{e_o^o} = 1.$$

(A halandósági táblák jelöléseit alkalmazva:

$$b \cdot e_o^o = d \cdot e_o^o = l_o \cdot e_o^o / T_o = e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x / T_o = T_o / T_o = 1).$$

Könnyen belátható a fenti összefüggések alapján az is, hogy stacionér népességben a valamely életkorhoz (korcsoporthoz) tartozó népességnek az össznépességben belüli aránya

($c_x = P_x / \sum_{x=0}^{\omega} P_x = P_x / P$) az adott életkoru népességhez való tartozás egy átlagos újszülött számára adott valószínűségnek és a stacionér népesség nyers születési arányszámának (illetve nyers halálozási arányszámának) szorzatával egyenlő:

$$c_x = b \frac{P_x}{B} = d \frac{P_x}{B} = \frac{1}{e_o^o} \cdot \frac{P_x}{B} = \frac{P_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x} = \frac{P_x}{P}.$$

$$\begin{aligned}
\text{és} \quad \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x &= e_0^{o'} L_0 + e_1^{o'} L_1 + e_2^{o'} L_2 + \dots = \\
&= \frac{T_0 + T_1}{2} L_0 + \frac{T_1 + T_2}{2} L_1 + \frac{T_2 + T_3}{2} L_2 + \dots = \\
&= \frac{T_0 + T_1}{2} + \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 + T_3}{2} + \dots = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} \frac{T_x + T_{x+1}}{2} / .
\end{aligned}$$

Ennek alapján állapítható meg, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség átlagos életkora egyenlő a különböző korúak által leéltendő átlagos élettartamok súlyozott számtani átlagával (az un. egy lakosra jutó életpotenciállal):

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_x}{P} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_x}{P} .$$

(A halandósági tábla jelöléseivel:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_0} .)$$

Ebből az összefüggésből kiindulva bizonyítható többek között az a Louis Henry-tól származó megállapítás, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség átlagos életkorának a kétszerese egyenlő a különböző korúak átlagos halálozási korainak $(x + e_x^{o'})$ a súlyozott számtani átlagával:

$$2 \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_x}{P} = 2 \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_x}{P} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_x}{P} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [P_x / x + e_x^{o'} /]}{P} ,$$

illetve (a halandósági tábla jelöléseivel):

$$2 \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_0} = 2 \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x / x + e_x^{o'} /]}{T_0} .$$

Általában azt tapasztaljuk, hogy:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} [P_x/x + e_x^{o'}]}{P} > e_o^{o'}, \text{ illetve: } \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x/x + e_x^{o'}]}{T_o} > e_o^{o'},$$

minthogy többnyire fennáll, hogy $/x + e_x^{o'}/ > e_o^{o'}$.

A stacionér népesség átlagos életkora ugyanakkor a túlságosan magas színvonalu (túlságosan kedvezőtlen) halandóság extrém eseteinek kivételével általában kisebb a születéskor várható átlagos élettartamnál, a meghaltak átlagos életkoránál, vagyis többnyire kimutatható, hogy:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} xP_x}{P} < e_o^{o'}, \text{ illetve: } \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xL_x}{T_o} < e_o^{o'}.$$

Végül megjegyzendő, hogy a stacionér népességben az un. nettó reprodukciós együttható (R_o) értéke, mely a gyermeknemzedék születéskori létszámának (B') és a szülőnemzedék születéskori létszámának (B), (illetve a leánynemzedék és az anya-nemzedék születéskori létszámának) arányát fejezi ki, egységnyi:

$$R_o = \frac{B'}{B} = 1,$$

ami az élveszületések évi számának időbeli változatlanságából adódik.

Lássunk néhány példát a stacionér népesség ismeretlen tulajdonságainak ismert tulajdonságaiból való származtatására, a tulajdonságok között fennálló kapcsolatok felhasználása alapján. Pressat nyomán (21) tételezzük fel, hogy valamely változatlan halandóságu és létszámu, zárt női népességben évenként 100 000 leány születik, korösszetétele és családi állapot szerinti összetétele pedig az alábbi adatok szerint alakul (a válások és az újra-házasodások elhanyagolhatók, az adatokat 1000 főben adjuk meg):

1.1. Egy változatlan halandóságu és létszámu, zárt női népesség megoszlása
életkor és családi állapot szerint

Korcsoport (év) (x, x+n)	Hajadonok	Férjezetek	Özvegyek
0- 4	362,1	-	-
5- 9	310,3	-	-
10-14	225,5	68,5	1,5
15-19	76,1	197,4	8,3
20-24	16,7	227,2	21,6
25-29	5,6	203,8	35,3
30-34	3,1	172,4	49,1
35-39	2,4	140,5	61,0
40-44	2,2	110,3	70,8
45-49	2,0	82,7	78,0
50-54	1,7	58,3	81,3
55-59	1,4	37,5	79,8
60-64	1,1	21,2	72,4
65-69	0,9	9,9	59,0
70-74	0,5	3,4	41,3
75-	0,3	0,5	19,3

Számítsuk ki, hogy:

a) Hány évet tesz ki e népességben a születéskor várható átlagos élettartam (e_o^0)?

b) Hány ‰-et tesz ki nyers születési arányszáma (b), nyers halálozási arányszáma (d) és természetes szaporodási arányszáma (r)?

A táblázat adatait összeadva 3024,2-et kapunk eredményül, vagyis a szóban forgó stacionér női népesség időben változatlan összlétszáma 3 024 200 fő, 3 024 200-zal egyenlő az egyes női születési évjáratok által leélendő (illetve leélt) évek száma is. Ez a szám - többek között - az elveszületések évi számának és a születéskor várható átlagos élettartamnak a szorzataként is felfogható:

$$3\,024\,200 = 100\,000 \cdot e_o^0,$$

ahonnan

$$e_o^0 = \frac{3\,024\,200}{100\,000} = 30,24 \text{ év.}$$

A születéskor várható átlagos élettartam tehát 30,24 évvel egyenlő, s ez egyben az egyes naptári évek alatt meghaltaknak (és az egyes születési évjáratok meghaltjainak) az átlagos életkora is.

Az a) kérdésre adott válaszunk birtokában a b) kérdésre adott válasz:

$$b = d = \frac{1}{e_o^o} = \frac{1}{30,24} = 0,03307 = 33,07 \text{ ‰}$$

$$r = b - d = 0,03307 - 0,03307 = 0,00000 = 0,00 \text{ ‰},$$

vagyis a szóban forgó stacionér női népesség egymással egyenlő nyers születési arányszáma (b) és nyers halálozási arányszáma (d) 33,07 ‰-kel, természetes szaporodási arányszáma pedig természetesen zérussal egyenlő.

Következő példánkban egy megközelítőleg stacionér népesség halandósági táblájából induljunk ki. Duvillard-nak a XVIII. század végi franciaországi halandósági színvonalat leíró halandósági táblája szerint 1000 élveszületett gyermek közül 502 érte el a 20 éves, és 214 a 60 éves kort. A születéskor várható átlagos élettartam 28,8 évvel, a 20 éves korban várható 34,3 évvel, a 60 éves korban várható pedig 12,0 évvel volt egyenlő. A népesség megközelítőleg stacionér volt.

Kérdések:

a) Megközelítőleg hány százalékot tett ki a XVIII. század végi Franciaországban a 0-19 éveseknek, a 20-59 éveseknek, a 60 éveseknek és ennél idősebbeknek az össznépességben belüli aránya?

b) Megközelítőleg hány ezreléket tett ki a nyers születési, halálozási és természetes szaporodási arányszám?

Adott tehát, hogy:

$$l_o = 1000 \text{ fő}; \quad l_{20} = 502 \text{ fő}; \quad l_{60} = 214 \text{ fő}$$

$$e_o^o = 28,8 \text{ év}; \quad e_{20}^o = 34,3 \text{ év}; \quad e_{60}^o = 12,0 \text{ év}$$

Kérdés, hogy:

$$\frac{L_{0-19}}{T_o} \cdot 100 = ?; \quad \frac{L_{20-59}}{T_o} \cdot 100 = ?; \quad \frac{L_{60-}}{T_o} \cdot 100 = ?$$

Tudjuk, hogy:

$$L_{0-19} = T_o - T_{20}; \quad L_{20-59} = T_{20} - T_{60}; \quad L_{60-} = T_{60}$$

$$T_o = l_o \cdot e_o^o = 1000 \cdot 28,8 = 28\,800$$

$$T_{20} = l_{20} \cdot e_{20}^o = 502 \cdot 34,3 = 17\,219$$

$$T_{60} = l_{60} \cdot e_{60}^o = 214 \cdot 12,0 = 2\,568$$

Ennek alapján:

$$L_{0-19} = 28\,800 - 17\,219 = 11\,581$$

$$L_{20-59} = 17\,219 - 2\,568 = 14\,651$$

$$L_{60-} = 2\,568 - 0 = 2\,568$$

$$T_0 = l_0 \cdot e_0^0 = \sum_{x=\infty}^0 L_x = 48\,587 - 19\,787 = 28\,800$$

$$\frac{L_{0-19}}{T_0} \cdot 100 = \left(1 - \frac{l_{20} \cdot e_{20}^0}{l_0 \cdot e_0^0}\right) \cdot 100 = \frac{11\,581}{28\,800} \cdot 100 = 40,2\%$$

$$\begin{aligned} \frac{L_{20-59}}{T_0} \cdot 100 &= \left(\frac{l_{20} \cdot e_{20}^0 - l_{60} \cdot e_{60}^0}{l_0 \cdot e_0^0}\right) \cdot 100 = \\ &= \frac{14\,651}{28\,800} \cdot 100 = 50,9\% \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{L_{60-x}}{T_0} \cdot 100 &= \frac{l_{60} \cdot e_{60}^0}{l_0 \cdot e_0^0} \cdot 100 = \\ &= \left[1 - \left(1 - \frac{l_{60} \cdot e_{60}^0}{l_0 \cdot e_0^0}\right)\right] \cdot 100 = \frac{2\,568}{28\,800} \cdot 100 = \frac{8,9\%}{100,0\%} \end{aligned}$$

A b) kérdésre adott válaszunk pedig:

$$b = d = \frac{1}{e_0^0} = \frac{1}{28,8} = 35\text{‰}; \quad r = b - d = 0$$

Megjegyezzük, hogy a szóban forgó népesség valójában igen lassu ütemben növekedett.

A stacionér népesség modelljének felhasználása különösen a történeti demográfiai és a paleodemográfiai kutatásokban gyakori. E kutatások során azonban gyakran követik el azt a hibát, hogy azon népességet, melynek a még ismeretlen demográfiai jellemzőit a már ismert demográfiai jellemzői alapján kívánják megállapítani (rekonstruálni), stacionérnak tekintik anélkül, hogy stacionér, illetve legalább közelítőleg stacionér jellegéről minden kétséget kizáróan megbizonyosodnának. Tételezzük fel, hogy a népesség ismert jellemzőire vonatkozó információkat kizárólag a temetőfeltárások eredményei szolgáltatják, ami a paleodemográfiai kutatásokban igen gyakori. Amennyiben a csontvázleletek alapján sikerült közelítő pontossággal megállapítani az elhunytak életkorát és elhalálozásuk (temetésük) időpontját, célszerű a halálozások egymást követő azonos nagyságu (pl. naptári évnvi) periód-

dusokra jutó számának és az egymást követő azonos nagyságu (pl. naptári évnvi) periódusok alatt meghaltak (eltemetettek) átlagos életkorának megállapítása. Ez utóbbi legegyszerűbben a halálozások a különböző korévek (korcsoportok) szerinti százalékos megoszlásának adataiból kiindulva történhetik. Amennyiben az egymást követő azonos periódusok alatt meghaltaknak (eltemetetteknek) sem a száma, sem az átlagos életkora nem tér el számottevően egymástól, nem tekinthető kizártnak, hogy a népesség, mely az adott temetőbe temetkezett, közelítőleg stacionér volt. Ekkor a meghaltaknak az egymást követő azonos nagyságu időszakok alatti száma az élveszületetteknek a vonatkozó időszakok alatti számával, az egymást követő azonos nagyságu időszakok alatt meghaltak átlagos életkora pedig a születéskor várható átlagos élettartammal (e_0^0) vehető egyenlőnek. Ebben az esetben a népesség összlétszáma (P) a halálozások (temetések) egy év alatti átlagos számának és a meghaltak átlagos életkorának (e_0^0) szorzataként is meghatározható:

$$P = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} = e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} D_x = D e_0^0 = B e_0^0,$$

a népesség kormegoszlása a halálozások életkor szerinti százalékos megoszlásának adataiból számított halandósági tábla stacionér népességének kormegoszlásával, nyers születési és halálozási arányszáma pedig a meghaltak átlagos életkorának reciprok értékével tekinthető közelítőleg egyenlőnek. Amennyiben a népesség, mely az adott temetőbe temetkezett, nem tekinthető stacionérnak, illetve legalább közelítőleg stacionérnak, a meghaltak átlagos életkora - mint jeleztük - nem egyenlő a születéskor várható átlagos élettartammal, a halálozások valamely időszak alatti száma nem egyenlő az élveszületések azonos időszak alatti számával stb., vagyis a stacionér népesség különböző tulajdonságainak interdependenciájából kiindulva - a népesség ismert jellemzőiből az ismeretlenek nem határozhatók meg.

4. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség tulajdonságainak interdependenciája

Térjünk át ezek után a stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népesség vizsgálatára. A halandósági színvonal, vagyis a különböző születési évjáratok (születési kohorszok) számára bármely adott életkor elérésének valószínűségei ez esetben is változatlanok és azonosak, míg azonban stacionér népességben a születések valamely időszak (pl. egy év) alatti száma időben változatlan, a stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességekben

$$B_0 \neq B_1 \neq B_2 \neq B_3 \neq \dots \neq B_i \neq \dots \neq B.$$

Stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességekben az egymással szomszédos, azonos nagyságu időszakok születésszámai között azonos, az egységtől különböző arány áll fenn.

Ez az arány - mint láttuk - stacionér népesség esetében is azonos, de egyenlő 1-gyel, stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességek esetében azonban a születések száma időszakról-időszakra (pl. évről-évre) azonos arányban változik.

Jelöljük az egymással szomszédos, azonos nagyságu időszakok születésszámai közötti arányt k -val, és állapodjunk meg abban, hogy

$$\frac{B_1}{B_0} = k$$

$$\frac{B_2}{B_1} = k$$

$$\frac{B_3}{B_2} = k$$

$$\vdots$$

$$\frac{B_i}{B_{i-1}} = k, \text{ stb.},$$

amiből következik, hogy

$$B_1 = B_0 \cdot k$$

$$B_2 = B_1 \cdot k = B_0 \cdot k^2$$

$$B_3 = B_2 \cdot k = B_0 \cdot k^3$$

$$\vdots$$

$$B_i = B_{i-1} \cdot k = B_0 \cdot k^i, \text{ stb.}$$

$$\vdots$$

Könnyen belátható, hogy ha

$k < 1$, a születések száma időszakról-időszakra nő, ha viszont

$k > 1$, a születések száma időszakról-időszakra csökken.

A népesség t időpontban megfigyelhető száma (P) a fentiek alapján:

$$P = B_0 \cdot r_0^P + B_0 \cdot k \cdot r_1^P + B_0 \cdot k^2 \cdot r_2^P + B_0 \cdot k^3 \cdot r_3^P + \dots + B_0 \cdot k^i \cdot r_i^P,$$

a népesség száma egy időszakkal (pl. egy évvel) korábban, vagyis a $t-1$ időpontban (P') pedig:

$$P' = B_0 \cdot k \cdot r_0^P + B_0 \cdot k^2 \cdot r_1^P + B_0 \cdot k^3 \cdot r_2^P + \dots + B_0 \cdot k^{i+1} \cdot r_i^P =$$

$$= k \cdot (B_0 \cdot r_0^P + B_0 \cdot k \cdot r_1^P + B_0 \cdot k^2 \cdot r_2^P + \dots + B_0 \cdot k^i \cdot r_i^P) = kP$$

A $P' = kP$ egyenlőségből következik, hogy nemcsak a születések száma tér el egy időszakkal (pl. egy évvel) a múlt felé haladva k -szorosán az egy időszakkal későbbtől, hanem a népesség száma is:

$$\frac{P'}{P} = \frac{B_1}{B_0} = k.$$

A különböző életkorok (korcsoportok) népessége t időpontbeli és $t-1$ időpontbeli számának egybevetéséből pedig kitűnik, hogy ez utóbbiak közötti arány is k -szoros. A kétévesek t időpontbeli száma pl.

pedig $B_0 \cdot k^2 \cdot r_2^P$, $t-1$ időpontbeli száma

$$B_0 \cdot k^3 \cdot r_2^P \quad \text{és}$$

$$\frac{B_0 \cdot k^3 \cdot r_2^P}{B_0 \cdot k^2 \cdot r_2^P} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{P'}{P} = k,$$

figyelembe véve továbbá a halandóság korszpecifikus jellemzőinek (pl. m_x -szel jelzett korszpecifikus arányszámainak) időbeli változatlanlenségát, megállapíthatjuk, hogy a különböző életkorok (korcsoportok) népessége halálozásainak (D_x) - a korösszetétel változatlanlenségát is figyelembe véve pedig - az összes halálozás száma (D) is k -szorosán nő, vagy csökken a megfigyelés időpontjához képest egy-egy időszakkal (pl. egy-egy évvel) a múlt felé haladva, vagyis

$$\frac{B_0 k^3 r_2^P}{B_0 k^2 r_2^P} = \frac{B_0 k^3 r_2^P m_2}{B_0 k^2 r_2^P m_2} = \frac{k D_3}{D_3} = \frac{B_1}{B_0} = \frac{P'}{P} = k,$$

továbbá az x évesek egy időszakkal (pl. egy évvel) korábbi számát P'_x -szel, az x éves koruk halálozásainak egy időszakkal korábbi számát pedig D'_x -szel jelölve:

$$\frac{B_1}{B_0} = \frac{D'_x}{D_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D'_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} = \frac{P'_x}{P_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P'_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x} = \frac{P'}{P} = k,$$

aminek alapján könnyen bebizonyítható a stabil népesség korábban felsorolt tulajdonságainak kölcsönös feltételezettsége. Legegyszerűbben a korösszetételnek és a halálozások kormegoszlásának állandósága bizonyítható, ugyanis a fenti egyenlőségsorozat alapján közvetlenül belátható, hogy

$$\frac{P'_x}{P'} = \frac{P_x}{P} \quad \text{és} \quad \frac{D'_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D'_x} = \frac{D_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} .$$

Könnyen belátható a fentiek alapján a születések kormegoszlásának állandósága is. Figyelembe véve ugyanis a termékenység korszpecifikus jellemzőinek (f_x -szel jelzett korszpecifikus arányszámainak) időbeli változatlanóságát, megállapíthatjuk, hogy:

$$\frac{P'_x f_x}{P_x f_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P'_x f_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x f_x} = k,$$

vagyis:

$$\frac{P'_x f_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P'_x f_x} = \frac{P_x f_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x f_x} .$$

Az intrinsic születési arányszám (b) és halálozási arányszám (d) a t időpontot közvetlenül megelőző időszakra (évre) vonatkozóan

$$b_t = \frac{B_o}{\frac{P'+P}{2}} = \frac{2 B_o}{kP+P} \quad \text{és} \quad d_t = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_x}{\frac{P'+P}{2}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} D_x}{kP+P} ,$$

a $t-1$ időpontot közvetlenül megelőző időszakra (évre) vonatkozóan pedig

$$b_{t-1} = \frac{B_1}{\frac{k^2 P + kP}{2}} = \frac{2 k B_o}{k^2 P + kP} \quad \text{és} \quad d_{t-1} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D'_x}{\frac{k^2 P + kP}{2}} = \frac{2 k \sum_{x=0}^{\omega} D_x}{k^2 P + kP} ,$$

és könnyen belátható, hogy

$$b_t = \frac{2 B_o}{kP + P} = b_{t-1} = \frac{2 k B_o}{k^2 P + kP} = \frac{2 B_o}{kP + P} = b, \quad \text{és}$$

$$d_t = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} D_x}{kP + P} = d_{t-1} = \frac{2 k \sum_{x=0}^{\omega} D_x}{k^2 P + kP} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} D_x}{kP + P} = d,$$

vagyis a stabil népesség nyers születési arányszáma és nyers halálozási arányszáma időben változatlan, s ebből adódóan változatlan különbségük is ($r = b-d$): a természetes szaporodás, illetve fogyás ún. intrinsic arányszáma. Hasonló megfontolások alapján - a fenti

gondolatmenetek megfordítása útján - bizonyítható a korspecifikus termékenységi és halálózási arányszámok változatlansága is.* A stacionér népesség felsorolt tulajdonságainak kölcsönös feltételezettségét is a fenti levezetésekéből, a $k = 1$ behelyettesítése útján láthatjuk be.

A k tényező eddigi értelmezéseiből adódik, hogy

$$P = \frac{1}{k} P'$$

$$B_0 = \frac{1}{k} B_1$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_x = \frac{1}{k} \sum_{x=0}^{\omega} D'_x \quad \text{stb.},$$

ugyanakkor fennáll az is, hogy

$$P = (1+r) P'$$

$$B_0 = (1+r) B_1$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_x = (1+r) \sum_{x=0}^{\omega} D'_x \quad \text{stb.},$$

ahol r a természetes szaporodás, illetve fogyás már említett un. intrinsic arányszáma, vagyis

$$\frac{1}{k} P' = (1+r) P'$$

$$\frac{1}{k} B_1 = (1+r) B_1$$

$$\frac{1}{k} \sum_{x=0}^{\omega} D'_x = (1+r) \sum_{x=0}^{\omega} D'_x \quad \text{stb.},$$

amiből kitűnik, hogy

$$k = \frac{1}{1+r} \quad \text{és} \quad r = \frac{1}{k} - 1,$$

A természetes szaporodás, illetve fogyás intrinsic arányszámát direkter módon úgy határozhatjuk meg, hogy a valamely időszak (pl. év) alatti természetes szaporodás, il-

* Itt említjük meg, hogy A.J. Lotka az olyan népességet, melynek természetes szaporodási (illetve fogyási) arányszáma állandó és korspecifikus halálózási arányszámai is változatlanok, a népesség mértani haladvány szerinti növekedését hirdető T.R. Malthus nevére eredetileg malthusianus népességnek nevezte. Stabíl népességnek a malthusianus népességnek azt a speciális fajtáját nevezte, melynek állandó természetes szaporodási (illetve fogyási) arányszáma a korspecifikus termékenységi arányszámok hosszú időn át tartó változatlanságából adódik (18).

letve fogyás abszolút nagyságát osztjuk az időszak közepi népességszámmal, vagyis

$$r = \frac{P - P'}{\frac{P + P'}{2}} = \frac{P - k P}{\frac{P + k P}{2}} = \frac{P (1-k)}{\frac{P (1+k)}{2}} = 2 \frac{(1-k)}{(1+k)}.$$

Könnyen belátható egyébként, hogy ha

- az r előjele pozitív, akkor $k = \frac{1}{1+r} < 1$, vagyis a népesség stabil növekvő,
- az r előjele negatív, akkor $k = \frac{1}{1+r} > 1$, vagyis a népesség stabil csökkenő,
- az $r = 0$, akkor $k = \frac{1}{1+0} = 1$, vagyis a népesség stacionér.

Amennyiben adva van valamely népesség halandósági táblája, és ki akarunk számítani egy stabil népességet az r valamely adott, 0-tól különböző értékének alapulvételével, úgy a különböző életkorok (korcsoportok) táblabeli stacionér népességének számát - az elmondottak értelmében - a

$$k^x = \left(\frac{1}{1+r}\right)^x = (1+r)^{-x} \text{ tényezővel kell megszoroznunk,}$$

az x éves korúak száma a stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességben tehát

$L_x (1+r)^{-x}$ lesz, és általában, ha az x évesek számát valamely stacionér népességben P_x -szel jelöljük, akkor az r valamely, 0-tól különböző értéke mellett kialakuló stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességben az $P_x (1+r)^{-x}$ -né alakulna át.

Ennek előrebocsátása után megismerkedhetünk a stabil népesség három legismerőbb formulájával: un. korösszetétel-formulájával, születési arányszám-formulájával és 1-re redukált általános egyenletével.

Az un. korösszetétel-formula az x éves korúak arányának (c_x) meghatározására szolgál:

$$\begin{aligned} c_x &= \frac{P_x (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x (1+r)^{-x}} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x (1+r)^{-x}} \cdot P_x (1+r)^{-x} = \\ &= \frac{B}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x (1+r)^{-x}} \cdot \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x} = b \frac{P_x}{B} k^x, \end{aligned}$$

vagyis az x éves korúak arányát valamely stabil népességben megkapjuk, ha intrinsic születési arányszámával megszorozzuk az x évesek közé tartozás egy átlagos ujszülött számára adott valószínűségének a k^x tényezővel alkotott szorzatát. Stacionér népességben

$$c_x = \frac{1}{e_o} \cdot \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x} = \frac{P_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x} = \frac{P_x}{P}$$

(A halandósági táblák jelöléseit alkalmazva

$$c_x = \frac{1}{e_o} \cdot \frac{L_x}{l_o} (1 + 0)^{-x} = \frac{L_x}{T_o}.$$

A születési arányszám-formulát legegyszerűbben a korösszetétel-formulából vezethetjük le. Amennyiben ugyanis elfogadjuk, hogy a különböző korok arányainak összessége egyenlő 1-gyel ($\sum_{x=0}^{\omega} c_x = 1$), el kell fogadnunk azt is, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} b \frac{P_x}{B} (1 + r)^{-x} = 1,$$

illetve az időben változatlan (állandó) születési arányszámnak (b) a $\sum$ jel elé való kiemelése után

$$b \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1 + r)^{-x} = 1,$$

ahonnan

$$b = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1 + r)^{-x}} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} k^x},$$

vagyis a stabil népesség nyers születési arányszáma egyenlő az újszülöttek különböző életkorokba tartozása valószínűségei a megfelelő k^x tényezővel alkotott szorzatai összegének reciprok értékével.

Stacionér népességben

$$b = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1 + 0)^{-x}} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B}} = \frac{1}{e_o}.$$

(A halandósági táblák jelöléseivel:

$$b = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_o} (1 + r)^{-x}} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_o}} = \frac{1}{e_o}).$$

Az egyre redukált általános egyenletet legegyszerűbben szintén a korösszetétel-formulából nyerhetjük, miután mindkét oldalát megszoroztuk a népesség összlétszámát szimbolizáló P-vel és a korszpecifikus termékenységi arányszámokat (vagyis az egyes korokban az egy főre jutó élveszületések számát) jelképező f_x -szel:

$$c_x = b \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x}$$

$$\begin{aligned} c_x P_x f_x &= b P_x \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x} = \\ &= B \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x} = P_x f_x (1+r)^{-x} \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} c_x \cdot P_x \cdot f_x = \sum_{x=0}^{\omega} P_x f_x (1+r)^{-x},$$

s minthogy $\sum_{x=0}^{\omega} c_x P_x f_x$ az elveszületések abszolút számát (B) eredményezi,

$$B = \sum_{x=0}^{\omega} P_x f_x (1+r)^{-x},$$

ebből

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x} = 1.$$

A stabil népesség egyre redukált általános egyenlete természetesen nemcsak a stabil népesség korösszetétel-formulájából vezethető le. Kiindulhatunk például abból a megfigyelésből is, hogy stabil népességben az elveszületések valamely t -vel jelzett időszak alatti B_t -vel jelzett abszolút száma:

$$B_t = \sum_{x=0}^{\omega} P_x \cdot f_x = \sum_{x=0}^{\omega} B_{t-x} r_x^p f_x = \sum_{x=0}^{\omega} B_{t-x} \frac{P_x}{B} f_x = B_{t-x} (1+r)^x,$$

ahonnan

$$B_{t-x} = \frac{B_t}{(1+r)^x} = B_t (1+r)^{-x},$$

vagyis

$$B_t = \sum_{x=0}^{\omega} B_t \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x} = B_t \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x},$$

s ebből

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x} = 1.$$

Stacionér népességben

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+0)^{-x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x = R_0 = 1.$$

(A halandósági táblák jelöléseivel:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_0} f_x (1+0)^{-x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_0} f_x = R_0 = 1).$$

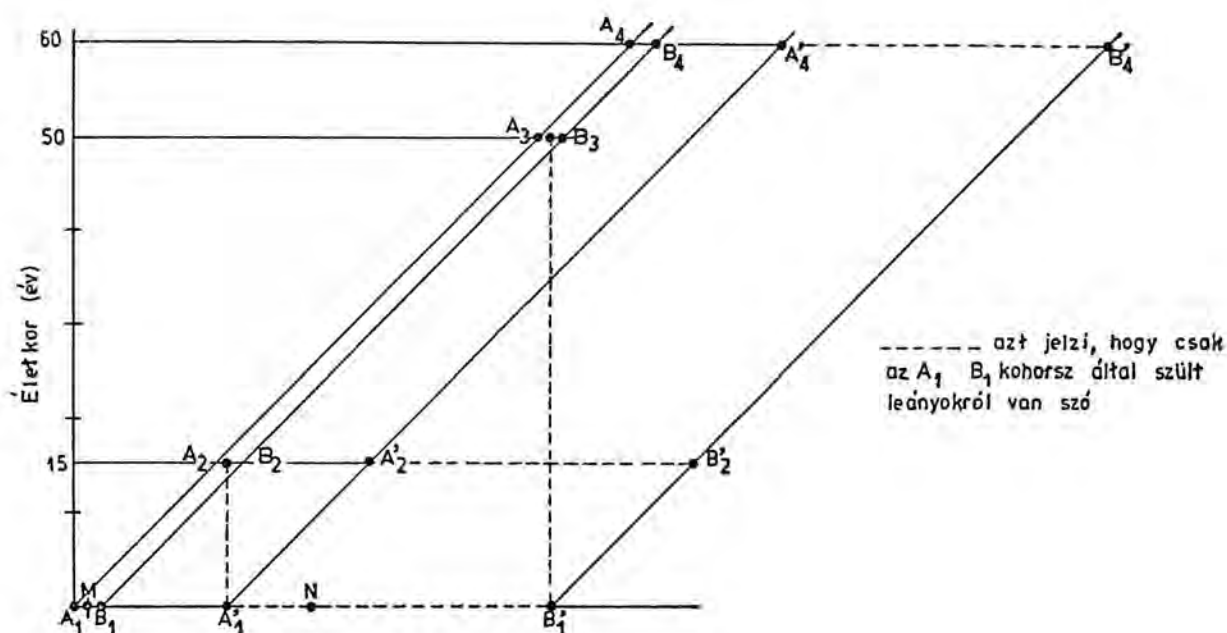
Az egyre redukált általános egyenletnek a stacionér népességre való alkalmazásával tehát az élet folyamán a halandóság hatásának figyelembevételével szült gyermekek számát, vagyis a nettó reprodukciós együtthatót kapjuk eredményül, melynek értéke stacionér népességben - mint jeleztük - egységnyi. Ez leggyakrabban az anyák által szült leányok számát jelenti, mivel a stabil népességi modell hosszú ideig csupán mint a női népesség modellje létezett, s bár az újabb kutatások - mint ezt látni fogjuk - ezt a fogyatékoságát felszámolták, a nettó reprodukciós együttható megőrizte hagyományos tartalmát.

5. A reprodukció

A reprodukció vizsgálatával kapcsolatban legcélszerűbb felvetni a népesség megújulásának, kicserélődésének kérdését is. Képzeljünk el egy zárt népességet, mely mintegy 100 születési évjáratnak (generációnak) a továbbélőiből tevődik össze. Ez a népesség a megújulás szakadatlan folyamatának van alávetve: minden évben egy új születési évjárat (generáció) lép soraiba (a 15-49 éves nők termékenységeinek eredményeként), és minden születési évjáratból (generációból) minden évben meghal bizonyos számú személy, egy születési évjárat (generáció) tagjai pedig évenként végleg kiválnak belőle. Ez a végleges kiválás "évenként átlagosan" értendő, minthogy az emberi élet felső határának (az ω -nak) nincsen állandó, végérvényesen rögzített értéke. A népesség megújulásának ezt a folyamatát nevezzük tulajdonképpen reprodukciónak, melynek stabil népességben a nettó reprodukciós együttható (R_0) egyik igen fontos mutatója. A nettó reprodukciós együttható (R_0) az egy anyaszületésre jutó leányszületek számát, más szavakkal: az anyanemzedék egy átlagos reprezentánsa által szült leánygyermek számát jelenti a halandóság hatásának figyelembevételével számítva. Bár minden női születési évjárat (női generáció) gyermekeit (s így leánygyermeküket is) nem valamely naptári év alatt, hanem 15 éves korától több naptári év alatt szüli meg, stabil népességben - e népesség sajátosságaiból adódóan - a nettó reprodukciós együttható (R_0) értékét úgy is megkaphatjuk, hogy valamely női születési évjárat számával elosztjuk a T idővel későbbi naptári év alatt (több női születési évjárat termékenységeinek eredményeként) született leánygyermek számát. A T az un. generációtávolság, az anyák átlagos életkora leánygyermekük megszületésekor (I. 2. ábra).

I. 2. AZ $A_1 B_1$ NŐI SZÜLETÉSI KOHORSZ REPRODUKCIÓJA

(R. Pressat nyomán)



I. 2. Az $A_1 B_1$ női születési kohorsz reprodukciója

(R. Pressat nyomán)

Stabil népességben a generációtávolságnak megfelelő idő alatt a születések száma, a halálozások száma, a népesség összlétszáma, a különböző korúak száma stb. is a nettó reprodukciós együttható által jelzett irányban és mértékben változik. Az évenkénti változás irányát és arányát - mint jeleztük - a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinszc arányszáma (r) mutatja.

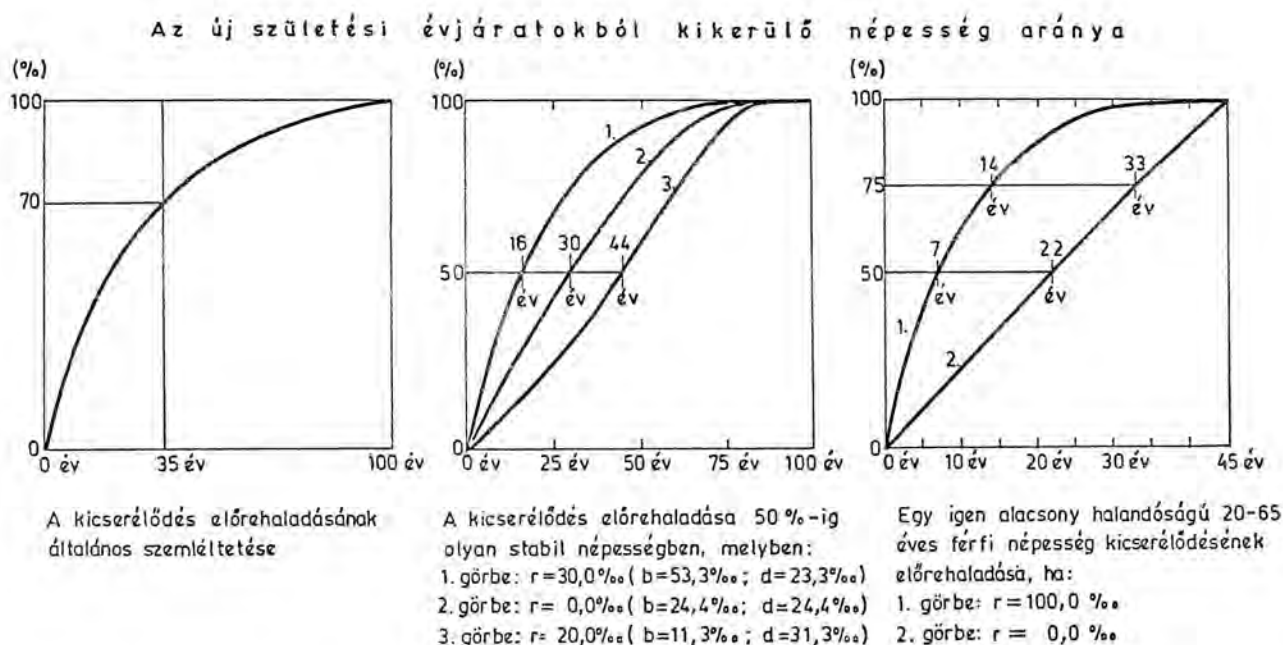
A megújuló népességben minden év végén vannak olyan személyek, akik az év elején még nem voltak (az év során születettek közül az év végéig továbbélők). Ezen új elemeknek az arányát a népességben megközelítőleg a nyers születési arányszám fejezi ki, melynek értéke leggyakrabban 1,5 % és 5 % között helyezkedik el. A nyers születési arányszám tehát egyben a népesség évi kicserélődési arányát is mutatja. (Bizonyos speciális szubpopulációkban az évenként belépők aránya természetesen többé-kevésbé jelentősen el is térhet, és általában el is tér az össznépesség nyers születési arányszámától; a gazdaságilag aktív mezőgazdasági népesség évi megújulási aránya például a jelentős eláramlás miatt jelenleg jóval a népesség nyers születési arányszáma alatt van.)

A népesség teljes kicserélődése valamely időponttól kezdődően mintegy száz év alatt zajlik le. A kicserélődés menetét egy derékszögű koordináta-rendszerbe rajzolt görbe segítségével követhetjük nyomon. E görbe egyes pontjainak az ordináta-értékei a kicserélődés megfigyelésének kezdete óta született új születési évjáratok (generációk) továbbélőinek

az össznépességen belüli százalékos arányát mutatják, és a régi születési évjáratok (generációk) össznépességen belüli százalékos arányát is kifejezik. A görbe egyes pontjainak abszcissa-értékei a kicserélődés megfigyelésének kezdete óta eltelt időt, s az új születési évjáratok (generációk) tagjainak életkorát mutatják években kifejezve. (Általános szemléltetését lásd az I. 3. ábra első koordináta-rendszerében.) A Roland Pressat nyomán (12) megrajzolt mellékelt ábra második (középső) koordináta-rendszerében látható 3 görbe az 1820-ban született franciaországi nők halandósági táblája ($e_0^0 = 41,01$ év) és különböző intrinszc szaporodási arányok (3 %, 0 %, - 2 %) alapulvételével kiszámított stabil népességekben mutatja a kicserélődés menetének alakulását. Az ábra harmadik koordináta-rendszerében egy

I. 3. A NÉPESSÉG KICSERÉLŐDÉSE

(R. Pressat nyomán)



I. 3. A népesség kicserélődése

(R. Pressat nyomán)

iparilag fejlett ország igen alacsony halandóságú, produktív koru (20-65 éves) férfi népessége kicserélődésének menetét láthatjuk 10 %-os és 0 %-os évi növekedési arány esetén. A második és a harmadik koordináta-rendszerben látható görbék világosan mutatják, hogy míg a szóban forgó népességek teljes kicserélődéséhez minden esetben megközelítőleg ugyanannyi idő kell, az 50 %-ig, 75 %-ig stb. való kicserélődéshez szükséges idő annál rövidebb, minél magasabb az évi kicserélődési arány, ami az össznépesség esetében - mint

jeleztük - megközelítőleg a nyers születési arányszámmal egyenlő. Ebben az értelemben beszélhetünk a népesség megújulásának, kicserélődésének gyorsabb, illetve lassabb üteméről is. A kicserélődés ütemének - R. Pressat szerint is - igen nagy társadalmi-gazdasági jelentősége van, hiszen - többek közt - a gondolkozási és cselekvési módok, a mentalitások stb. kicserélődésének üteméről van szó, ami a társadalmi-gazdasági fejlődés igen jelentős tényezője.

Lássuk ezek után, hogyan számítjuk ki a stabil népesség főbb mutatóit: a reprodukciós együtthatókat, a generációtávolságot (az anyák átlagos életkorát gyermekeik születésekor) és a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinszc arányszámát. E mutatók kiszámítását az ún. termékenységi táblák felhasználásával a legcélszerűbb elvégezni. Tekintsük át e számításokat Magyarország népessége 1959-1960. évi termékenységi alaptáblája nyomán, amely dr. Szabady Egon: "Néhány kelet-európai szocialista ország népességének termékenységi alaptáblája" című tanulmányában jelent meg.* A mellékelt termékenységi tábla (1) oszlopa az alapul vett korcsoportokat jelöli meg években ($x, x+n$), a (2) oszlop az egyes korcsoportok által felölelt évek számát (n) adja meg: $n = (x+n) - x$. A (3) oszlop a vonatkozó évek női népessége halandósági tábláinak továbbbélési rendjét (l_x), a (4) pedig az egy átlagos nő által leélt évek számának az egyes korcsoportokra jutó hányadait ($nL_x : l_0$) tartalmazza. Ez utóbbiak azonosak az átlagos élettartamnak a megfelelő öt éves korcsoportokra jutó részeivel, összegük ezen átlagos élettartammal lenne egyenlő, amennyiben ezen összegbe a propagatív koron túli értékeiket is beleszámítanánk

$$(e_o^o = \sum_{x=0}^{\omega} L_x / l_0 = T_o / l_0 = \text{stb.})$$

Az (5) oszlop az egy nőre jutó elveszületések évi számát írja le korcsoportonként. Becslése a

$$\frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

formula segítségével történt, melyben $B_{x, x+n}$ az egyes korcsoportok női népessége összes elveszületett gyermekeinek a számát, $p_{x, x+n}^n$ pedig a vonatkozó korcsoportok női népességének számát jelzi. A (6) oszlop az egy nőre jutó elveszületések bruttó, vagyis a halandóság hatásának figyelembevétele nélkül becsült számát az egyes korcsoportok egész tartamára vonatkoztatva adja meg:

$$\frac{n \cdot B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

* Az idézett tanulmány Albánia, Csehszlovákia, Lengyelország és a Szovjetunió népességének termékenységi tábláit is bemutatja. Lásd dr. Egon Szabady: Basic fertility tables of some East-European socialist countries. In: World views of population problems. (Ed. by E. Szabady) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. 387-408. pp., 447. p. (22).

1.2. Magyarország népességének 1959–1960. évi termékenységi alaptáblája

Kor- csoport (év)	Az egyes korcso- portok által felölelt évek száma	A nők halandósági táblájának		Az egy nőre jutó élveszületések					Az élveszületések halandóságából adódó vesztesége		Az x-éves kortól várható összes élveszületések		Az x-éves kortól várható élveszületések átlagos				
		tovább- élési rendje	az egyes korcso- portokra jutó élet- tartam értékei	évi szám	bruttó száma		nettó száma		az egyes korcso- portok- ban ösz- szesen	az egyes korcso- portok felső határáig összesen	az egyes korcso- portok- ban ösz- szesen	az egyes korcso- portok felső határáig összesen	bruttó száma	nettó száma	bruttó száma	nettó száma	számának a halan- dóságból adódó veszte- sége
					az egyes korcso- portok- ban ösz- szesen	az egyes korcso- portok felső határáig összesen	az egyes korcso- portok- ban ösz- szesen	az egyes korcso- portok felső határáig összesen									
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)		
0- 4	5,0	100 000	4,76370	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	204760	191632	2,04760 [*]	1,91632 ^{**}	0,13128		
5- 9	5,0	94 733	4,73197	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	204760	191632	2,04760	2,02244	0,02516		
10-14	5,0	94 548	4,72379	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	204760	191632	2,04760	2,02682	0,02078		
15-19	5,0	94 386	4,71302	0,05265	0,26325	0,26325	0,24814	0,24814	0,01511	0,01511	204760	191632	2,04760	2,03030	0,01730		
20-24	5,0	94 114	4,69659	0,16105	0,80525	1,06850	0,75639	1,00453	0,04886	0,06397	178435	166818	1,78435	1,77251	0,01184		
25-29	5,0	93 738	4,67603	0,10675	0,53380	1,60230	0,49921	1,50374	0,03459	0,09856	97910	91179	0,97910	0,97270	0,00640		
30-34	5,0	93 288	4,65084	0,05460	0,27300	1,87530	0,25394	1,75768	0,01906	0,11762	44530	41258	0,44530	0,44226	0,00304		
35-39	5,0	92 723	4,61725	0,02625	0,13125	2,00655	0,12120	1,87888	0,01005	0,12767	17230	15864	0,17230	0,17109	0,00121		
40-44	5,0	91 903	4,56585	0,00766	0,03830	2,04485	0,03497	1,91385	0,00333	0,13100	4105	3744	0,04105	0,04074	0,00031		
45-49	5,0	90 661	4,49116	0,00055	0,00275	2,04760 [*]	0,00247	1,91632 ^{**}	0,00028	0,13128	275	247	0,00275	0,00272	0,00003		

^{*} A leányszületések 0,483-at kitevő 1959–1960. évi arányával szorozva 0,98899-es nagyságú bruttó reprodukciós együtthatót (R) eredményez.

^{**} A leányszületések 0,483-at kitevő 1959–1960. évi arányával szorozva 0,92558-as nagyságú nettó reprodukciós együtthatót (R₀) eredményez.

Minthogy az egyes korcsoportok által felölelt évek száma öt, gyakorlatilag az (5) oszlop megfelelő adatainak ötszörösét tartalmazza. Ezen adatok felülről történő kumulatív összegezése után nyerjük a (7) oszlopot, mely az egy nőre jutó elveszületések bruttó számát az egyes korcsoportok felső határáig összegezve tünteti fel:

$$\sum_{x=0}^{x=x} n \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}.$$

A (8) oszlop az egy nőre jutó elveszületések nettó, vagyis a halandóság hatását is kifejező számát tartalmazza az egyes korcsoportok egész tartmára vonatkoztatva. Becslése az egy nőre jutó elveszületések évi számának (5. oszlop) a megfelelő nL_x/l_0 értékekkel (4. oszlop) való szorzása után, vagyis az

$$\frac{nL_x}{l_0} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

formula felhasználásával történt. A (9) oszlop az egyes korcsoportok felső határáig összegezve tünteti fel az egy nőre jutó elveszületések nettó számát:

$$\sum_{x=0}^{x=x} \frac{nL_x}{l_0} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}.$$

Az ezután következő két oszlop az elveszületések számának a halandóságból adódó veszteségeit tünteti fel: a (10) oszlop az egyes korcsoportokra vonatkoztatva:

$$n \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n} - \frac{n \cdot L_x}{l_0} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n},$$

a (11) oszlop pedig az egyes korcsoportok felső határáig összegezett formában:

$$\sum_{x=0}^{x=x} n \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n} - \sum_{x=0}^{x=x} \frac{n \cdot L_x}{l_0} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}.$$

E veszteségek becslése tehát - mint a fenti formulákból is kitűnik - a vonatkozó bruttó és nettó mutatók értékei különbségének megállapítása formájában történik.

A (12) oszlop az x -éves kortól várható összes elveszületések bruttó számát tünteti fel. Becslése a (6) oszlop adatainak alulról történő kumulatív összegezése és az eredményeknek 100 000-rel, vagyis az alapul vett női halandósági tábla gyökével (l_0) való szorzása után történt, s így egy, a propagatív kor felső határáig változatlanul 100 000 főből álló fiktív női kohorsz születéskori és az egyes életkorokban várható elveszülöttei számának alakulását mutatja. A kiszámításra használt formula tehát:

$$l_o \sum_{x=\omega}^{x=x} n \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

A (13) oszlop az x-éves kortól várható összes élveszületések nettó számát tünteti fel. Kiszámítása tehát a (8) oszlop adatainak alulról történő kumulálása útján történt. A 100 000-rel (l_o -val) való szorzást ez esetben is el kell végeznünk, mivel a nők halandósági táblája egész fiktív kohorszának a születéskor és az egyes életkorokban várható élveszületés-számát kívánjuk kifejezni. A becslésre alkalmazott formula tehát:

$$l_o \cdot \sum_{x=\omega}^{x=x} \frac{nL_x}{l_o} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n} = \sum_{x=\omega}^{x=x} nL_x \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

volt.

A két következő oszlop az x-éves kortól egy nő által várható élveszületések átlagos számát mutatja: a (14) oszlop a halandóság hatásával nem számoló bruttó számot, a (15) oszlop pedig a halandóság hatását is kifejező nettó számot. A (14) oszlop becslése a (6) oszlop adatainak alulról történő kumulatív összegezése, illetve a (12) oszlop adatainak 100 000-rel való elosztása útján történt, tartalmát tehát a

$$\sum_{x=\omega}^{x=x} n \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

formula fejezi ki. A (15) oszlopot a (13) oszlop adatainak a továbbélési rend (l_x) megfelelő adataival történő elosztása útján becsültük, s így tartalma a

$$\frac{l_o \sum_{x=\omega}^{x=x} \frac{nL_x}{l_o} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}}{l_x} = \frac{\sum_{x=\omega}^{x=x} nL_x \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}}{l_x}$$

formulákkal írható le. A (16) oszlop a (14) és (15) oszlop adatainak különbségét, vagyis az x-éves kortól várható élveszületések átlagos számának a halandóságból adódó veszteségét mutatja be. Becslése tehát a

$$\sum_{x=\omega}^{x=x} n \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n} - \sum_{x=\omega}^{x=x} nL_x \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

formula alapján történt.

A termékenységi alaptáblák birtokában viszonylag könnyen becsülhető a reprodukció két hagyományos mutatója, a bruttó és a nettó reprodukciós együttható is.

A bruttó reprodukciós együtthatót (R) a (7) oszlop utolsó sora, illetve a (14) oszlop első sora adatának, vagyis a születéskor várható élveszületések átlagos bruttó számának a leányzületések azonos időszakra vonatkozó arányával történő szorzása útján kaphatjuk meg. A nettó reprodukciós együttható (R_0) a (9) oszlop utolsó sora, illetve a (15) oszlop első sora adatának, vagyis a születéskor várható élveszületések átlagos nettó számának szintén a leányzületések arányával való szorzása útján számítható ki. E számítások eredményeit a termékenységi alaptábla két lábjegyzete tartalmazza. A bruttó és nettó reprodukciós együtthatók különbsége ($R - R_0$) a leányélveszületések halandóságból adódó veszteségét fejezi ki. E veszteség - mint látható - Magyarország esetében 0,06341 leányélveszületés.

A termékenységi alaptáblák adatainak birtokában viszonylag könnyen kiszámítható az un. generációtávolság, (T) vagyis az az átlagos életkor, amikor az anyák gyermekeiket megszülik, és a természetes szaporodás, illetve fogyás un. intrinsic arányszáma (r) is. E mutatók értékeinek olyan népességfejlődés esetén lenne reális jelentőségük, amely akkor alakulna ki, ha a termékenységnak és a halandóságnak a termékenységi alaptáblákban leírt korszpecifikus jellemzői állandósulnának, és a népesség stabilá válna. Ez esetben a generációtávolság azt az időt is jelentené, melynek leforgása alatt a népesség és az élveszületések abszolút száma is a nettó reprodukciós együttható (R_0) által jelzett arányban megváltozik. A természetes szaporodás, illetve fogyás intrinsic arányszáma (r) a stabil népesség évi növekedését, illetve fogyását jelezné. A mutatók kiszámításáról az 1. 3. tábla nyújt áttekintést.

Az 1. 3. tábla (1) oszlopa szintén az alapul vett korcsoportokat jelöli meg években ($x, x+n$), a (2) oszlop pedig az egyes korcsoportokban élő nők átlagos életkorát* tünteti fel:

$$x + \frac{n}{2}.$$

A tábla (3) oszlopa az egy nőre jutó élveszületések nettó, vagyis a halandóság hatását is kifejező számát adja meg az egyes korcsoportok egész tartamára vonatkozva. Azonos tehát a termékenységi alaptábla (8) oszlopával, s így tartalma szintén az

$$\frac{nL_x}{l_0} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}^n}$$

formulával írható le.

A (4) oszlop a (3) oszlop adatainak a (2) oszlop adataival való szorzása útján keletkezett, kiszámításának formulája tehát:

* Az egyes korcsoportok által felölelt évek száma felének ($n/2$) az életkort jelző x -hez való hozzáadása öt évesnél kisebb korcsoportok felhasználásával végzett számítások esetében is indokolt, sőt koréves részletezésben megadott adatokkal végzett számítások esetében is növeli az eredmények pontosságát, ha a 0-éveseket 0,5, az 1 éveseket 1,5, a 2 éveseket 2,5 stb. éveseknek tekintjük, s amennyiben az egy évet is mint valamely korintervallumon belüli időszakot kezelnénk, az $x + n/2$ jelölés az életkor jelölésére általánosítható lenne.

$$\left(x + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{l_0} \cdot \frac{L_x}{p_{x, x+n}} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}}\right).$$

Az (5) oszlopot a (4) oszlop adatainak felülről történő kumulatív összegezése után számítottuk ki, az alkalmazott formula tehát:

$$\sum_{x=0}^{x=x} \left(x + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{l_0} \cdot \frac{L_x}{p_{x, x+n}} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}}\right) \text{ volt.}$$

Ezen oszlop utolsó sorának adata a leányszületések megfelelő időszakra vonatkozó arányával szorozva (R_1), és e szorzat a nettó reprodukciós együtthatóval elosztva eredményezi a keresett generációtávolságot.*

1.3. A generációtávolság és a természetes szaporodás intrinszc arányszáma Magyarország női népessége 1959-1960. évi korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámai alapján számítva

Korcsoport (x, x+n) (év)	Az egyes kor- csoportok női népességének átlagos életkora $x + \frac{n}{2}$ (év)	Az egy nőre jutó élveszületések nettó száma az egyes korcso- portokban $\frac{n}{l_0} \cdot \frac{L_x}{p_{x, x+n}} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}}$	$\left(x + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{l_0} \cdot \frac{L_x}{p_{x, x+n}} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}}\right)$	$\sum_{x=0}^{x=x} \left(x + \frac{n}{2}\right) \cdot \left(\frac{n}{l_0} \cdot \frac{L_x}{p_{x, x+n}} \cdot \frac{B_{x, x+n}}{p_{x, x+n}}\right)$
(1)	(2)	(3)	(4) = (2) x (3)	(5) = $\sum_0^x$ (4)
0- 4	2,5	0,00000	0,000000	0,000000
5- 9	7,5	0,00000	0,000000	0,000000
10-14	12,5	0,00000	0,000000	0,000000
15-19	17,5	0,24814	4,342450	4,342450
20-24	22,5	0,75639	17,018775	21,361225
25-29	27,5	0,49921	13,728275	35,089500
30-34	32,5	0,25394	8,253050	43,342550
35-39	37,5	0,12120	4,545000	47,887550
40-44	42,5	0,03497	1,486225	49,373775
45-49	47,5	0,00247	0,117325	49,491100**

* A generációtávolság tulajdonképpen súlyozott számtani átlag, melynek kiszámításában az átlagolandó értékek szerepét az egyes korcsoportok női népességének átlagos életkora, a súlyok szerepét az egy nőre jutó leány-élveszületések korcsoportonkénti nettó száma, a súlyok összegének szerepét pedig ez utóbbiak összege, vagyis a nettó reprodukciós együttható (R_0) tölti be.

** A leányszületések 0,483-at kitevő 1959-1960. évi arányával szorozva 23,904201 (R_1), mely a 0,92558 nagyságú nettó reprodukciós együtthatóval osztva 25,826184 évet kitevő generációtávolságot ($R_1:R_0 = T$) eredményez. A természetes szaporodás intrinszc arányszáma tehát

$$\frac{25,826184}{\sqrt{0,92558}} - 1 = -0,00299.$$

$$T = R_1 : R_0 .$$

A generációtávolság (T) és a nettó reprodukciós együttható (R_0) birtokában viszonylag könnyen meghatározható a természetes szaporodás intrinsic arányszáma (r) is. Stabil népességben ugyanis - mint ismeretes -

$$R_0 = (1 + r)^T , \text{ ahonnan}$$

$$1 + r = \sqrt[T]{R_0} , \text{ s így}$$

$$r = \sqrt[T]{R_0} - 1 .^{*}$$

A generációtávolságra (T) és a természetes szaporodás intrinsic arányszámára (r) vonatkozó számítások befejező szakaszát és eredményeit a 2. tábla lábjegyzete írja le. Látjuk, hogy Magyarország esetében az - r - negatív előjelű, vagyis természetes fogyást jelez, ami az 1959-1960. évi nettó reprodukciós együtthatónak (R_0) az egység alatti értékével függ össze. Ezért bár a generációtávolság Magyarországon viszonylag rövid (25,8 év), ez a rövidség a népesség természetes fogyását elősegítő tényező. Az egységnyinél kisebb nettó reprodukciós együttható (R_0) és a természetes szaporodás negatív előjelű intrinsic arányszáma (r) esetén ugyanis a generációtávolságnak (T), vagyis annak az időszaknak a rövidsége, mely alatt a stabil állapotban levő népesség a nettó reprodukciós együttható által jelzett arányban megváltozik, a népesség természetes fogyását gyorsítja, mint ezt dr. Vukovich György is kimutatta a generációtávolság magyarországi alakulásának elemzése kapcsán.^{**}

A reprodukciós együtthatók, a generációtávolság és a természetes szaporodás intrinsic arányszáma természetesen az itt leírtól eltérő módon is kiszámítható. A számítás módját igen gyakran a rendelkezésre álló adatok jellege befolyásolja. Az 1.4. táblában az Amerikai Egyesült Államok vonatkozó 1944. évi adatainak felhasználásával egy olyan számítást mutatunk be, amely felépítésében nagyjából az előbbi példát követi, mégis egyrészt az egy nőre jutó leány-élveszületések korcsoportonként megadott száma, másrészt számos, a korábbi példában szereplő szempont figyelmen kívül hagyása miatt jóval rövidebb annál.

A természetes szaporodás intrinsic arányszámának kiszámítására szolgáló $r = \sqrt[T]{R_0} - 1$ formula természetesen a stabil népesség 1-re redukált általános egyenletéből is levezethető.

* Stacionér népességben - mint említettük - a nettó reprodukciós együttható értéke 1, s emiatt a természetes szaporodás intrinsic arányszáma

$$r = \sqrt[T]{1} - 1 = 1 - 1 = 0 .$$

** Dr. Vukovich György: A reprodukció elemzésének néhány kérdése. In: World views of population problems. Edited by Egon Szabady. Budapest, 1968. 435-447.p. (23).

A $\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{-x} = 1$ egyenlet bal oldalát az $(1+r)^{-T}$ tényezővel egyidejűleg megszorozva és elosztva

$$(1+r)^{-T} \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x \frac{(1+r)^{-x}}{(1+r)^{-T}} =$$

$$= (1+r)^{-T} \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{T-x} = 1.$$

Hatványsorba fejtvé $(1+r)^{T-x} = 1 + (T-x)r + \frac{(T-x) \cdot (T-x-1)}{2} r^2 + \dots$

Figyelembe véve, hogy

$$(T-x) \cdot (T-x-1) = (T-x)^2 - (T-x),$$

megállapíthatjuk, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{T-x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x + r \sum_{x=0}^{\omega} (T-x) \frac{P_x}{B} f_x +$$

$$+ \frac{r^2}{2} \sum_{x=0}^{\omega} (T-x)^2 \frac{P_x}{B} f_x - \frac{r^2}{2} \sum_{x=0}^{\omega} (T-x) \frac{P_x}{B} f_x.$$

Mint hogy $T = R_1 : R_0$, az x -értékek súlyozott számtani átlagaként is felfogható $\sum_{x=0}^{\omega} (T-x) \frac{P_x}{B} f_x = 0$,
s így ez utóbbi kifejezést tartalmazó tagok értéke is zérus. Megállapíthatjuk továbbá, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x = R_0, \text{ vagyis}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} f_x (1+r)^{T-x} = R_0 + R_0 \frac{r^2}{2} V_x = R_0 \left(1 + \frac{r^2}{2} V_x\right),$$

ahol $V_x = \sum_{x=0}^{\omega} (T-x)^2 \frac{P_x}{B} f_x$, vagyis az x -értékek szórásnégyzete (varianciája). Megállapítható tehát, hogy

$$(1+r)^{-T} R_0 \left(1 + \frac{r^2}{2} V_x\right) = 1.$$

Mindkét oldal logaritmusát véve:

$$-T \log (1+r) + \log R_0 + \log \left(1 + \frac{r^2}{2} V_x\right) = 0.$$

Az r^2 -t tartalmazó tagot elhanyagolva

$$-T \log (1+r) = -\log R_0,$$

vagyis

$$T \log (1+r) = \log R_0,$$

s így

$$\log (1+r) = \frac{\log R_0}{T},$$

s ebből adódóan

$$1+r = \sqrt[T]{R_0}$$

és

$$r = \sqrt[T]{R_0} - 1.$$

Amennyiben az r^2 -t tartalmazó tagot nem hanyagoljuk el:

$$\log (1+r) = \frac{\log R_0 + \log \left(1 + \frac{r^2}{2} V_x\right)}{T},$$

s ebből adódóan

$$1+r = \sqrt[T]{R_0 \left(1 + \frac{r^2}{2} V_x\right)}$$

$$r = \sqrt[T]{R_0 + R_0 \frac{r^2}{2} V_x} - 1.$$

Az egyenlőség bal oldalán szereplő r^2 a természetes szaporodás intrinszc arányszáma, a $\sqrt[T]{R_0} - 1$ formula alapján nyert értékének a négyzete. Az r^2 -t tartalmazó tag figyelembevételével tehát az r értékének pontosabb becslése végezhető el, mint csupán a $\sqrt[T]{R_0} - 1$ formula felhasználásával. Amennyiben az $(1+r)^{T-x}$ hatványsorba fejtését folytattuk volna, fenti egyenletünknek r^3 -t, r^4 -t stb. tartalmazó tagjai is lennének, s ezek egymás utáni figyelembevétele és az r hatványainak mindig a közvetlenül megelőző becslés eredménye alapján történő kiszámítása az r értékének egyre növekvő pontosságú megközelítését eredményezné.

A stabil népesség 1-re redukált általános egyenletéből az

$$\frac{1}{2} \beta r^2 + \alpha r - \log_e R_0 = 0$$

zérusra redukált vegyes másodfoku egyenlet is levezethető, melyben

$$\alpha = T = \frac{R_1}{R_0} \quad \text{és} \quad \beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} = \frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_2}{R_0},$$

vagyis a fenti, zérusra redukált egyenletet megoldásának megkönnyítése érdekében az

$$\frac{1}{2} \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_2}{R_0} \right) r^2 + \frac{R_1}{R_0} r - \log_e R_0 = 0$$

formában célszerű felírni. Az egyenlet a vegyes másodfoku egyenlet gyökképletének felhasználásával oldható meg:

$$r_{1,2} = \frac{1}{\beta} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 2\beta \log_e R_0} \right) =$$

$$= \frac{-\frac{R_1}{R_0} \pm \sqrt{\frac{R_1^2}{R_0^2} + 2 \left(\frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_2}{R_0} \right) \log_e R_0}}{\frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_2}{R_0}}.$$

1.4. A reprodukciós együtthatók, a generációtávolság és a természetes szaporodás intrinsic arányszámának kiszámítása az Amerikai Egyesült Államok 1944. évi adatai alapján

Kor-csoport (év)	Az egy nő-re jutó leány-élveszületések évi száma	Az egyes korcsoportok női népességének átlagos életkora	A nők halandósági táblájának életbenmaradási valószínűségei	Az egy nőre jutó leány-élveszületések nettó száma az egyes korcsoportokban	R_1	R_2
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = 5 (2) x (4)	(6) = (5) x (3)	(7) = (3) ² x (5)
15-19	0,01102	17,5	0,93704	0,05165	0,904	15,817
20-24	0,06249	22,5	0,92888	0,29025	6,530	146,936
25-29	0,07825	27,5	0,91789	0,35911	9,876	271,576
30-34	0,05948	32,5	0,90527	0,26921	8,749	284,356
35-39	0,03501	37,5	0,89031	0,15586	5,845	219,180
40-44	0,01069	42,5	0,87268	0,04666	1,985	84,284
45-49	0,00088	47,5	0,85078	0,00376	0,179	8,484
Összesen	0,25782*	-	-	1,17650**	34,066***	1030,633

* Az egyes korcsoportok által felölelt évek számával szorozva $5 \times 0,25782 = 1,289$ nagyságú bruttó reprodukciós együtthatót eredményez.

** A nettó reprodukciós együttható értéke.

*** A generációtávolság $T = R_1 : R_0 = 34,066 : 1,17650 = 28,955$ év, a természetes szaporodás intrinsic arányszámának értéke pedig

$$r = \frac{28,955}{\sqrt{1,17650}} - 1 = 0,00561, \text{ vagyis}$$

5,6 ‰, illetve 0,6 ‰.

Forrás: H.H. Wolfenden: Population Statistics and Their Compilation. Revised Edition, Chicago 1954. 217. p. (24).

Az 1. 4. tábla adatai alapján például

$$\alpha = \frac{R_1}{R_0} = \frac{34,066}{1,17650} = 28,955$$

$$\beta = \frac{R_1^2}{R_0^2} - \frac{R_2}{R_0} = \frac{34,066^2}{1,17650^2} - \frac{1030,633}{1,17650} = -37,6250$$

$$\frac{1}{2} \beta = -37,6250 \cdot 0,5 = -18,8125$$

$$\log_e R_0 = \log_e 1,17650 = 2,3026 \log_{10} 1,17650 = 0,162542$$

$$A - 18,8125 r^2 + 28,955 r - 0,162542 = 0$$

vegyes másodfoku egyenlet gyökeit kell tehát meghatároznunk. A számításokat elvégezve az $r_1 = 0,00563$ és az $r_2 = 1,53456$ eredményeket kapjuk, melyek közül az r_1 értéke fogadható el a $\sqrt[T]{R_0} - 1$ formula felhasználásával nyert eredménynél pontosabb megoldásként.

E számítási módszer további illusztrációjául szolgálhat az 1966.évi, lengyelországi adatokat tartalmazó 1. 5. tábla is.

A megfelelő stabil népességeket - mint említettük - a halandósági tábla L_x oszlopának az $(1+r)^{-x}$, pontosabb számítás esetén az $(1+r)^{-(x + \frac{n}{2})}$ tényező megfelelő értékeivel való szorzása útján számíthatjuk ki.

A halandóság különböző színvonalait képviselő halandósági táblák és a termékenység különböző színvonalait jelképező reprodukciós együtthatók felhasználásával különböző elemzési célokra a stabil népességek egész rendszere számítható ki. Azok a szerzők, akik, illetve azok a szervek, melyek a stabil népességek ilyen rendszereit kiszámították és publikálták*, a különböző stabil népességeket gyakran a bruttó reprodukciós együttható (R) és a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) egymáshoz rendelt értékei formájában adják meg. A megfelelő stabil népesség kiszámításához a megadott bruttó reprodukciós együtthatóból (R) először kiszámítandó a nettó reprodukciós együttható (R_0), amit legegyszerűbben a bruttó reprodukciós együttható értékének leggyakrabban a 28 éves kor (generáció-távolság) elérése valószínűségével való megszorzása útján számítunk ki, mely utóbbit* abból a női halandósági táblából vesszük, melyből a megadott átlagos élettartam (e_0^0) értéke származik. Ezután kerülhet sor a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinszc arány-számának (r) és a megfelelő stabil népességnek a kiszámítására ($L_x (1+r)^{-x}$), melyhez szintén annak a halandósági táblának az L_x oszlopát használjuk, melyre a megadott e_0^0 érték utal.

*Ezek közül napjainkban Ansley J. Coale és Paul Demeny: Regional Model Life Tables and Stable Populations (Princeton University Press, 1966. 871.p.) c. munkája a legnépszerűbb, amely fokozatosan háttérbe szorítja az ENSZ és más szerzők, illetve szervek hasonló jellegű publikációit. (26).

1.5. A reprodukciós együtthatók, a generációtávolság és a természetes szaporodás intrinszc arányszámának kiszámítása Lengyelország 1966. évi adatai alapján

Kor-csoport (év)	Az egy nő-re jutó leány-élveszületések évi száma	Az egyes korcsoportok női népességének átlagos életkora	A nők halandósági táblájának életbenmaradási valószínűségei	Az egy nő-re jutó leány-élveszületések nettó évi száma		
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (2) x (4)	(6) = (3) x (5)	(7) = (3) x (6)
15-19	0,01514	17,5	0,95683	0,01478	0,25865	4,52638
20-24	0,08580	22,5	0,95422	0,08187	1,84207	41,44657
25-29	0,06771	27,5	0,95100	0,06439	1,77073	48,69507
30-34	0,03903	32,5	0,94691	0,03696	1,20120	39,03900
35-39	0,02038	37,5	0,94114	0,01918	0,71925	26,97188
40-44	0,00635	42,5	0,93284	0,00592	0,25160	10,69300
45-49	0,00049	47,5	0,92024	0,00045	0,02138	1,01555
Összesen	0,23521*	-	-	0,22355**	6,06488***	172,38745****

* Az egyes korcsoportok által felölelt évek számával szorozva $5 \times 0,23521 = 1,17605$ nagyságu bruttó reprodukciós együtthatót (R) eredményez.

** Az egyes korcsoportok által felölelt évek számával szorozva $5 \times 0,22355 = 1,11775$ nagyságu nettó reprodukciós együtthatót (R_0) eredményez.

*** Az egyes korcsoportok által felölelt évek számával szorozva az R_1 tényező értékét eredményezi: $5 \times 6,06488 = 30,32440 = R_1$.

**** Az egyes korcsoportok által felölelt évek számával szorozva az R_2 tényező értékét eredményezi: $5 \times 172,38745 = 861,93725 = R_2$.

A generációtávolság: $\alpha = \frac{R_1}{R_0} = \frac{30,3244}{1,1177} = 27,131$ év;

$$\beta = \alpha^2 - \frac{R_2}{R_0} = 27,13^2 - \frac{861,93725}{1,1177} = -35,1335;$$

$$\log_e R_0 = 2,3026 \cdot \log_{10} R_0 = 2,3026 \cdot 0,0482 = 0,11099.$$

$$r = \frac{1}{\beta} (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 2\beta \log_e R_0}) = 0,00427, \text{ vagyis } 4,3 \text{ ‰, ill. } 0,4 \text{ ‰}.$$

Forrás: J. Z. Holzer: Model ludności ustabilizowanej. SGPiS, Warszawa, 1969, 118 p. 108. (25).

Lássunk néhány példát a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség ismeretlen tulajdonságainak ismert tulajdonságaiból való származtatására a tulajdonságok között fennálló kapcsolatok felhasználása alapján.

Az 1820-ban született franciaországi nők halandósági táblájának halálozási valószínűségei (q_x) életük első tíz éve alatt - Pierre Delaporte számításai szerint - az alábbiak szerint alakultak:

$q_0 = 0,15\ 270$	$q_5 = 0,01\ 500$
$q_1 = 0,06\ 200$	$q_6 = 0,01\ 260$
$q_2 = 0,03\ 700$	$q_7 = 0,01\ 051$
$q_3 = 0,02\ 520$	$q_8 = 0,00\ 881$
$q_4 = 0,01\ 930$	$q_9 = 0,00\ 781$
	

Kérdések:

a) Hogyan alakultak a szóban forgó halandósági tábla továbbélési rendjének (l_x) értékei születéstől tíz éves korig?

b) Hogyan alakult a táblabeli stacionér népesség (L_x) első tíz évjáratának létszáma?

c) Hogyan alakul a szóban forgó halandósági tábla, és évi 1 %-os természetes szaporodási arányszám (r) alapulvételével kiszámítható stabil népesség első tíz évjáratának létszáma?

d) Hogyan alakul a c) alatti feltételek alapján kiszámított stabil népességben a nyers születési és a nyers halálozási arányszám értéke, ha a 0. év alatt 100 000 élveszületéssel, ugyanezen év végére (december 31-re) pedig 3 044 220 főből álló népességszám elérésével számolunk?

e) Hogyan alakul a szóban forgó stabil népességben az ötévesek és a kilencévesek össznépességén belüli aránya?

Az első három kérdésre a feleletet a mellékelt 1.6. tábla tartalmazza, mely egyben a vonatkozó számítások menetéről is felvilágosítást ad.

1.6. Az 1920-ban született franciaországi női generáció halandósági jellemzőinek és évi 1 %-os szaporodási aránynak alapulvételével becslött 0-9 éves stabil népesség kiszámításának sémája

Életkor (év) x	q_x	d_x	l_x	$L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2}$	$k^x = \left(\frac{1}{1,01}\right)^x$	Stabil népesség = $= k^x L_x$
0	0,152 70	15 270	100 000	92 365	1	92 365
1	0,062 00	5 253	84 730	82 103	0,9901	81 290
2	0,037 00	2 941	79 477	78 006	0,9803	76 469
3	0,025 20	1 929	76 536	75 571	0,9706	73 384
4	0,019 30	1 440	74 607	73 887	0,9610	71 004
5	0,015 00	1 096	73 167	72 619	0,9515	69 094
6	0,012 60	908	72 071	71 617	0,9420	67 466
7	0,010 51	748	71 163	70 789	0,9327	66 026
8	0,008 81	618	70 415	70 106	0,9235	64 742
9	0,007 81	545	69 797	69 524	0,9143	63 569
10	-	-	69 252	-	-	-

A nyers születési arányszám (b) tehát:

$$b = \frac{100\ 000}{0,5 (1+0,9901) \cdot 3\ 044\ 220} = \frac{100\ 000}{0,995 \cdot 3\ 044\ 220} \approx$$

$$\approx 1,005 \cdot \frac{100\ 000}{3\ 044\ 220} = \frac{100\ 500}{3\ 044\ 220} = 33,0 \text{ ‰}$$

A nyers halálozási arányszám (d) pedig:

$$d = b - r = 0,0330 - 0,0100 = 0,0230 = 23,0 \text{ ‰}.$$

A stabil népesség korösszetétel-formulája, mint ismeretes:

$$c_x = b \cdot \frac{P_x}{B} k^x = \frac{B}{\sum_{x=\omega}^0 P_x k^x} \cdot \frac{P_x}{B} k^x = \frac{P_x k^x}{\sum_{x=\omega}^0 P_x k^x},$$

jelen esetben

$$c_x = b \cdot \frac{L_x}{l_0} k^x = \frac{l_0}{\sum_{x=\omega}^0 L_x k^x} \cdot \frac{L_x}{l_0} \cdot k^x = \frac{L_x k^x}{\sum_{x=\omega}^0 L_x k^x},$$

vagyis
$$c_5 = \frac{69\ 094}{3\ 044\ 220} = 2,27 \text{ ‰}$$

és
$$c_9 = \frac{63\ 569}{3\ 044\ 220} = 2,09 \text{ ‰}.$$

Az 1820-ban született franciaországi nők halandósági viszonyai állandósulásának feltételezése természetesen azt is jelenti, hogy a halandósági viszonyok a transzverzálisan megfigyelhető halandóságnak, vagyis a transzverzális halandósági tábláknak is sajátjaivá válnak. A halandóság korspecifikus jellemzői állandósulásának feltételezése azonban - mint ismeretes - a stabil népesség kialakulásának csak egyik feltétele. Amennyiben valamely transzverzális halandósági tábla halandósági viszonyai állandósulásának feltételezéséből indulunk ki, ez hasonlóképpen azt is jelenti, hogy e viszonyok a népességet alkotó születési évjáratok halandósági tábláinak is sajátjaivá válnak. A végeredmény tehát mindkét esetben az, hogy a transzverzálisan és a longitudinálisan megfigyelhető életkor szerinti halandósági jellemzők azonosulnak egymással. A transzverzálisan megfigyelhető halandósági jellemzők állandósulásának feltételezéséből indul ki következő példánk.

Albánia női népessége 1960-1961. évi összevont halandósági táblája továbbélési rendjének (l_x) értékei születéstől 50 éves korig az alábbiak szerint alakultak:

$l_0 = 100\ 000$	$l_{25} = 85\ 208$
$l_1 = 91\ 457$	$l_{30} = 84\ 513$
$l_5 = 87\ 208$	$l_{35} = 83\ 717$
$l_{10} = 86\ 397$	$l_{40} = 82\ 822$
$l_{15} = 86\ 071$	$l_{45} = 81\ 757$
$l_{20} = 85\ 734$	$l_{50} = 80\ 497$
	

Az egy nőre jutó elveszületések évi száma ugyanakkor a

15-19 évesek korcsoportjában	0,06680
20-24 évesek korcsoportjában	0,28108
25-29 évesek korcsoportjában	0,31584
30-34 évesek korcsoportjában	0,26790
35-39 évesek korcsoportjában	0,20601
40-44 évesek korcsoportjában	0,13361
45-49 évesek korcsoportjában	0,05923

volt. Az elveszületettek 48,4 %-a volt leány.

Kérdések:

- Mekkora a fenti adatok alapján a kiszámítható bruttó reprodukciós együttható (R) értéke?
- Mekkora a fenti adatok alapján kiszámítható nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke?
- Hány évet tesz ki a fenti adatok alapján számítva a generációtávolság (T), ha:
 - a halandóság hatásának figyelembevétele nélkül becsüljük?
 - a halandóság hatásának figyelembevételével számítjuk?
- Hány %-ot tesz ki a természetes szaporodás intrinszc arányszámának (r) a fenti adatok alapján kiszámítható értéke?
- Hogyan interpretálható a természetes szaporodás intrinszc arányszáma és a 32,4 %-ot kitevő tényleges arányszáma közötti különbség?

A bruttó és a nettó reprodukciós együttható értékeinek kiszámításához szükséges első lépéseket a mellékelt 1.7. tábla tartalmazza.

1.7. A bruttó és a nettó reprodukciós együttható kiszámításának sémája Albánia női népessége 1960-1961. évi halandósági és termékenységi jellemzői alapján

Korcsoport (év) $x, x+n$	Az egyes kor- csoportok által felölelt évek száma $(x+n) - x$	$\frac{5L}{l_o} x$	Az egy nőre jutó élve- születések évi száma	(2) x (4)	(3) x (4)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0- 4	5,0	4,47583	0,00000	0,00000	0,00000
5- 9	5,0	4,33680	0,00000	0,00000	0,00000
10-14	5,0	4,31046	0,00000	0,00000	0,00000
15-19	5,0	4,29581	0,06680	0,33400	0,28696
20-24	5,0	4,27414	0,28108	1,40540	1,20138
25-29	5,0	4,24347	0,31584	1,57920	1,34026
30-34	5,0	4,20619	0,26790	1,33950	1,12684
35-39	5,0	4,16402	0,20601	1,03005	0,85783
40-44	5,0	4,11557	0,13361	0,66805	0,54988
45-49	5,0	4,05736	0,05923	0,29615	0,24032
				6,65235	5,60347

A bruttó reprodukciós együttható értéke tehát:

$$R = 6,65235 \cdot 0,484 = 3,21974$$

A nettó reprodukciós együttható értéke pedig:

$$R_o = 5,60347 \cdot 0,484 = 2,71208$$

A generációtávolság a halandóság hatásának figyelembevétele nélkül számítva:

$$\begin{aligned}
 & 0,484 \cdot \frac{\sum_{x=15}^{x=50} (x + \frac{n}{2}) \left(5 \cdot \frac{B_{x, x+5}}{p_{x, x+5}} \right)}{R} = \\
 & = \frac{205,514375 \times 0,484}{3,21974} = \frac{99,468958}{3,21974} = 30,89 \text{ év}
 \end{aligned}$$

A generációtávolság a halandóság hatásának figyelembevételével számítva:

$$\begin{aligned}
 T = R_1 : R_o; \quad R_1 &= 4,484 \cdot \sum_{x=15}^{x=50} (x + \frac{n}{2}) \left(\frac{5L}{l_o} x \cdot \frac{B_{x, x+5}}{p_{x, x+5}} \right) = \\
 &= 172,486025 \cdot 0,484 = 83,483239
 \end{aligned}$$

$$T = R_1/R_0 = 83,483239 : 2,71208 = 30,78 \text{ év}$$

$$r = \frac{30,781997}{\sqrt{2,71208}} - 1 = 0,03294333,$$

vagyis:

$$r = 32,9 \text{ ‰} = 3,3 \text{ ‰}.$$

32,9 ‰ > 32,4 ‰, vagyis a természetes szaporodás intrinsic arányszáma nagyobb tényleges arányszámánál.

Lássunk ezek után egy több kelet-európai szocialista ország egybevetését is lehetővé tevő példát.

A nettó reprodukciós együtthatónak, a halandóság hatásának figyelembevételével számított generációtávolságnak és a természetes szaporodás tényleges arányszámának az 1960. körüli adatok alapján számított értéke néhány kelet-európai szocialista országban az alábbi 1.8. tábla szerint alakult:

1.8. A nettó reprodukciós együttható, a generációtávolság és a tényleges szaporodási arány értékének néhány kelet-európai szocialista ország 1960. körüli adatai alapján becsült alakulása

Ország	Évek	Nettó reprodukciós együttható (R_0)	Generáció-távolság (T) (években)	A természetes szaporodás tényleges arányszáma (‰)
Csehszlovákia	1960-1961	1,11897	25,6	6,7
Lengyelország	1960-1961	1,31993	27,5	14,9
Magyarország	1959-1960	0,92558	25,8	4,5
Szovjetunió	1958-1959	1,26182	28,5	17,8

Kérdések:

a) Hány ‰-et, illetve ‰-ot tesznek ki a természetes szaporodás intrinsic arányszámának a fenti adatok alapján becsülhető értékei?

b) Milyen következtetések vonhatók le a természetes szaporodás intrinsic arányszámainak és tényleges arányszámainak egybevetéséből?

A természetes szaporodás intrinsic arányszámainak (r) értékei a fenti adatok alapján az alábbiak:

Csehszlovákia (1960-1961)

$$r = \frac{25,567459}{\sqrt{1,11897}} - 1 = 0,00440625,$$

vagyis:

$$r = 4,4 \text{ ‰} = 0,4 \text{ ‰},$$

és

$$4,4 \text{ ‰} < 6,7 \text{ ‰}.$$

Lengyelország (1960-1961)

$$r = \frac{27,633563}{\sqrt{1,31993}} - 1 = 0,01009558,$$

vagyis: $r = 10,1 \text{ ‰} = 1,0 \text{ ‰},$
és $10,1 \text{ ‰} < 14,9 \text{ ‰}.$

Magyarország (1959-1960)

$$r = \frac{25,826184}{\sqrt{0,92558}} - 1 = -0,00299,$$

vagyis: $r = -3,0 \text{ ‰} = -0,3 \text{ ‰}$
és $-3,0 \text{ ‰} < 4,5 \text{ ‰}.$

Szovjetunió (1958-1959)

$$r = \frac{28,458242}{\sqrt{1,26182}} - 1 = 0,00820487,$$

vagyis: $r = 8,2 \text{ ‰} = 0,8 \text{ ‰},$
és $8,2 \text{ ‰} < 17,8 \text{ ‰}.$

E példákban is kitűnik, hogy az intrinsic szaporodási arány becsült értéke a szóban forgó országok mindegyikében kisebb a tényleges szaporodási arány értékénél. A korábbi példából ugyanakkor kitűnt, hogy a stabil állapothoz közel álló albán népesség esetében ez nem így van.

A stabil növekvő, illetve csökkenő, és általában a zérustól különböző állandó szaporodási rátájú népességekkel kapcsolatban a leginkább jogos felvetni a népesség megkét-szereződési idejének kérdését és azt a kérdést is, hogy valamely népességben meghatározott idő alatt hány százalékkal nő, illetve csökken az össznépesség, illetve a különböző életkorokhoz tartozó népesség száma, a népmozgalmi események valamely időszak (pl. nap-tári év) alatti volumene stb.

Állapítsuk meg, először, hogy hány év alatt kétszereződik meg valamely stabil népességben az élveszületések és a halálozások évi száma, a 40-44 évesek száma, valamint a népesség összlétszáma, ha a természetes szaporodás intrinsic arányszáma $(r) = 5 \text{ ‰}, 10 \text{ ‰}, 15 \text{ ‰}, 20 \text{ ‰}, 25 \text{ ‰}, 30 \text{ ‰}, 35 \text{ ‰}, 40 \text{ ‰}.$

A feladat megoldása:

Ha $r =$	5 ‰	10 ‰	15 ‰	20 ‰	25 ‰	30 ‰	35 ‰	40 ‰
a felsorolt jelenségek megkét-szereződési ideje	139 év	69,7 év	46,5 év	35,0 év	28,1 év	23,4 év	20,1 év	17,7 év

$$\text{Ugyanis } (1+r)^x = 2$$

$$x \log (1+r) = \log 2 = 0,30103$$

$$x = \frac{0,30103}{\log (1+r)} ;$$

$$\text{Például } r = 5 \text{ ‰ esetén } x = \frac{0,30103}{\log 1,005} = \frac{0,30103}{0,00217} = 139 \text{ év, stb.}$$

Állapítsuk meg ezután, hogy hányszorosára, illetve hány százalékkal nő valamely stabil népességben száz év alatt az élveszületések és a halálozások évi száma, a 40-44 évesek száma, valamint a népesség összlétszáma, ha a természetes szaporodás intrinszc arányszáma (r) = 5 ‰, 10 ‰, 15 ‰, 20 ‰, 25 ‰, 30 ‰, 35 ‰, 40 ‰.

A feladat megoldása:

Ha $r =$	5 ‰	10 ‰	15 ‰	20 ‰	25 ‰	30 ‰	35 ‰	40 ‰
a felsorolt jelenségek 100 év alatt	1,65	2,70	4,44	7,24	11,8	19,2	31,2	50,5
	- szeresükre nőnek, illetve							
	65	170	344	624	1080	1820	3020	4950
	‰-kal növekszenek							

Ugyanis $(1+r)^{100}$ értéke határozandó meg.

$\log (1+r)^{100} = 100 \log (1+r)$, s ez visszakeresve a növekedés keresett mértékét adja.

$$\text{Például } r = 5 \text{ ‰ esetén } 100 \cdot \log 1,005 = 0,217 \text{ és } 1,005^{100} = 1,65$$

$$r = 40 \text{ ‰ esetén } 100 \cdot \log 1,04 = 1,703 \text{ és } 1,04^{100} = 50,5 \text{ stb.}$$

6. A mindkét nembeli stabil népesség

Bizonyos elemzések, vizsgálatok céljára szükségünk lehet a mindkét nembeli stabil népesség korösszetételének és nemek szerinti összetételének ismeretére is. A mindkét nembeli stabil népességben sem az össznépesség, sem az egyes korévek (korcsoportok) népessége nemek szerinti megoszlása nem változik, ami látszólag ellentmond annak a ténynek, hogy a férfi népesség nettó reprodukciós együtthatójának (R_o^f) értéke nagyobb a női népesség nettó reprodukciós együtthatójának (R_o^n) értékénél:

$$R_o^f > R_o^n.$$

Ez azonban azzal jár együtt, hogy a férfi népesség esetében a generációtávolság, vagyis az apák átlagos életkora fiugyermekük megszületésekor (T^f) is nagyobb a női népesség esetében megfigyelhető generációtávolságnál, vagyis az anyák átlagos életkoránál leánygyermekük megszületésekor:

$$T^f > T^n$$

és kimutatható, hogy közelítő pontossággal $R_o^f / R_o^n = T^f / T^n$, s hogy:

$$\log(1+r) = \frac{\log R_o^n}{T^n} = \frac{\log R_o^f}{T^f}$$

vagyis

$$1+r = \sqrt[T^n]{R_o^n} = \sqrt[T^f]{R_o^f},$$

s így

$$r = \sqrt[T^n]{R_o^n} - 1 = \sqrt[T^f]{R_o^f} - 1, \text{ stb.}$$

A természetes szaporodás intrinsic arányszámának (r) értéke tehát a férfi népesség esetében ugyanaz, mint a női népesség esetében, s így az össznépesség és az egyes korévek (korcsoportok) népessége nemek szerinti strukturája is állandó.

Az össznépesség és az egyes korévek (korcsoportok) népességének nemek szerinti megoszlása a mindkét nemben stabil népességben, valamint a mindkét nemben stabil népesség korstrukturája legegyszerűbben a vonatkozó stabil férfi népesség és a stabil női népesség időben változatlan, nyers születési arányszámai reciprok értékeinek felhasználásával számítható ki.

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x}} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x},$$

ami stacionér népességben a születéskor várható átlagos élettartammal egyenlő:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1+0)^{-x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_x}{B} = \frac{P}{B} = e_o^o.$$

illetve a halandósági tábla jelöléseivel:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_o} (1+0)^{-x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{l_o} = \frac{T_o}{l_o} = e_o^o.$$

A születéskor várható átlagos élettartam az újszülöttek által leéltendő összes évek számának (P , illetve T_0) egy újszülöttre jutó hányadát (P/B , illetve $T_0/1_0 = e_0^0$) jelenti, mivel azonban P , illetve T_0 a stacionér népesség összlétszámának is mutatója, a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0), - ami stacionér népességben, mint láttuk, a nyers születési arányszám reciproka ($e_0^0 = 1/b$), - az egy élveszületésre jutó népességszám mutatójaként is felfogható. Stabil növekvő, illetve csökkenő népességben a nyers születési arányszám reciprok értéke nem mutatója a születéskor várható átlagos élettartamnak, csupán az egy élveszületésre jutó folyó évi (o. évi) népességszámot mutatja. Minthogy 100 leány-élveszületésre általában 105 fiú-élveszületés jut, a stabil férfi népesség nyers születési arányszámának reciprok értékét ($1/b^f$), illetve a stacionér férfi népesség születéskor várható átlagos élettartamát (e_0^{of}) meg kell szoroznunk 1,05-dal, hogy a vonatkozó stabil női népesség nyers születési arányszáma reciprok értékével ($1/b^n$), illetve a vonatkozó stacionér női népesség születéskor várható átlagos élettartamával (e_0^{on}) a mindkét nembeli stabil népesség nemek szerinti összetételének alakulása szempontjából egybevezethető legyen. A stabil férfi népességnek (P^f) a mindkét nembeli stabil népességen belüli aránya:

$$\frac{P^f}{P^f + P^n} = \frac{\frac{1,05}{b^f}}{\frac{1,05}{b^f} + \frac{1}{b^n}},$$

illetve stacionér népességben:

$$\frac{P^f}{P^f + P^n} = \frac{1,05 e_0^{of}}{1,05 e_0^{of} + e_0^{on}}.$$

A stabil női népességnek (P^n) a mindkét nembeli stabil népességen belüli aránya:

$$\frac{P^n}{P^f + P^n} = \frac{\frac{1}{b^n}}{\frac{1,05}{b^f} + \frac{1}{b^n}},$$

illetve stacionér népességben:

$$\frac{P^n}{P^f + P^n} = \frac{e_0^{on}}{1,05 e_0^{of} + e_0^{on}}.$$

A stabil férfi népességnek a vonatkozó stabil női népességhez viszonyított aránya:

$$\frac{P^f}{P^n} = \frac{\frac{1,05}{b^f}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{1,05 b^n}{b^f};$$

A stabil női népességnek a vonatkozó stabil férfi népességhez viszonyított aránya:

$$\frac{P^n}{P^f} = \frac{\frac{1}{b^n}}{\frac{1,05}{b^f}} = \frac{b^f}{1,05 b^n} \quad .$$

A mindkét nembeli stabil népesség korösszetételének kiszámítása:

1. a stabil női népesség egyes korévekhez (korcsoportokhoz) tartozó hányadainak és az ehhez tartozó stabil férfi népesség egyes korévekhez (korcsoportokhoz) tartozó hányadainak e népességek nyers születési arányszáma reciprok értékeivel való megszorozása;
2. a stabil férfi népesség ezuton nyert korévenkénti (korcsoportonkénti) adatainak a férfi népesség születési többletét kifejező 1,05-dal való megszorozása;
3. a stabil férfi népesség a 2. alatt jelzett művelet eredményeként kapott korévenkénti (korcsoportonkénti) adatainak és a stabil női népesség az 1. alatt jelzett művelet eredményeként kapott korévenkénti (korcsoportonkénti) adatainak korévenként (korcsoportonként) való összeadása;
4. az egyes korévek (korcsoportok) férfi és női népessége együttes számának e népességek együttes összlétszámával való elosztása után történhet.

A 2. alatt jelzett művelet elvégzése után kerülhet sor a nemek korévenkénti (korcsoportonkénti) egymáshoz viszonyított arányának kiszámítására, a 3. alatt jelzett művelet elvégzése pedig az egyes korévek (korcsoportok) mindkét nembeli stabil népessége nemek szerinti megoszlásának kiszámítását is lehetővé teszi.

Lássunk egy példát a mindkét nembeli stabil népességgel kapcsolatban felmerülő számításoknak a gyakorlati lebonyolítási módjára.

Egy Coale és Demény már idézett könyve által leírt (26) keleti-típusú stabil női népességben ($e_0^o = 77,50$ év, $r = 5,00$ ‰) és a hozzá tartozó keleti-típusú stabil férfi népességben ($e_0^o = 72,74$ év, $r = 5,00$ ‰) a korösszetétel, a nyers születési arányszám (b), a nyers halálozási arányszám (d), az élők átlagos életkora ($\bar{a}$), a meghaltak átlagos életkora ($\bar{e}$) és a 0-14 éveseknek, a 60 éveseknek és ennél idősebbeknek a 15-59 évesekhez viszonyított aránya (DEP.RATIO) a következők szerint alakul:

1.9. Egy keleti-típusú stabil női népesség és a hozzá tartozó stabil férfi népesség korstruktúrája

Korcsoport (év) $x, x+n$	A női népesség kormegoszlása (%)	A férfi népesség kormegoszlása (%)
0	1,54	1,62
1 - 4	6,08	6,39
5 - 9	7,43	7,81
10 - 14	7,24	7,61
15 - 19	7,06	7,40
20 - 24	6,88	7,20
25 - 29	6,70	6,99
30 - 34	6,52	6,79
35 - 39	6,34	6,59
40 - 44	6,16	6,38
45 - 49	5,96	6,15
50 - 54	5,74	5,86
55 - 59	5,49	5,48
60 - 64	5,18	4,98
65 - 69	4,75	4,34
70 - 74	4,11	3,52
75 - 79	3,20	2,53
80 -	3,62	2,35
Összesen:	100,00	100,00

A női népességben:

$$b = 15,66 \text{ ‰}$$

$$d = 10,66 \text{ ‰}$$

$$r = 5,00 \text{ ‰}$$

$$\bar{a} = 37,37 \text{ év}$$

$$\bar{e} = 76,37 \text{ év}$$

DEP. RATIO = 0,759

A férfi népességben:

$$b = 16,54 \text{ ‰}$$

$$d = 11,54 \text{ ‰}$$

$$r = 5,00 \text{ ‰}$$

$$\bar{a} = 35,66 \text{ év}$$

$$\bar{e} = 71,32 \text{ év}$$

DEP. RATIO = 0,699

Kérdések:

a) Hogyan alakul a közölt adatok alapján kiszámítható mindkét nembeli kelet-típusú stabil népességnek a kormegoszlása?

b) Hány százalékot tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben a férfiak és a nők össznépességén belüli aránya?

c) Hány évet tesz ki a mindkét nembeli stabil népesség születéskor várható átlagos élettartama?

d) Hány ezreléket tesz ki a szóban forgó mindkét nembeli stabil népesség nyers születési arányszáma?

e) Hány ezreléket tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben a nyers halálozási arányszám?

f) Hány évet tesz ki a mindkét nembeli stabil népességben az élők átlagos életkora?

g) Hány évet tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben a meghaltak átlagos életkora?

h) Hogyan alakul e mindkét nembeli stabil népességben a 0-14 éveseknek, a 60 éveseknek és ennél idősebbeknek a 15-59 évesekhez viszonyított aránya?

i) Mivel magyarázható, hogy a c) kérdésre adott válaszuk különbözik a g) kérdésre adott válaszuktól?

Az a) kérdés megoldásával kapcsolatban figyelembe kell venni, hogy

$$\text{a nők esetében} \quad 1/b = 1/15,66 \text{ ‰} = 63,839,$$

$$\text{a férfiak esetében pedig} \quad 1/b = 1/16,54 \text{ ‰} = 60,468.$$

A megoldás további menetét az 1.10. tábla tartalmazza.

A fentiek alapján a férfiak össznépességen belüli aránya =

$$= \frac{63,487}{63,839 + 63,487} = \frac{63,487}{127,326} = 49,86 \text{ ‰}.$$

A nők össznépességen belüli aránya =

$$= \frac{63,839}{63,839 + 63,487} = \frac{63,839}{127,326} = 50,14 \text{ ‰}.$$

A születéskor várható átlagos élettartam:

$$77,50 \times 0,488 = 37,82$$

$$72,74 \times 0,512 = \frac{37,24}{75,06} \text{ év.}$$

A nyers születési arányszám:

$$15,66 \times 0,5014 = 7,8519$$

$$16,54 \times 0,4986 = \frac{8,2468}{16,0987} \text{ ‰}.$$

A nyers halálozási arányszám:

$$10,66 \times 0,5014 = 5,3449$$

$$11,54 \times 0,4986 = \frac{5,7538}{11,0987} \text{ ‰}.$$

$$\text{és } 16,0987 - 11,0987 = 5,00 \text{ ‰}.$$

1.10. Egy mindkét nembeli stabil népesség nemek és kor szerinti összetételének meghatározása

Kor- csoport (év) x, x+n (1)	A női népesség kormeg- oszlása (%) (2)	A férfi népesség kormeg- oszlása (%) (3)	(4) = = (2) : 100	(5) = = (3) : 100	(6) = = (4)x63,839	(7) = = (5)x60,468	(8) = = (7) x 1,05	(9) = = (6) + (8)	A mindkét nembeli népesség kormeg- oszlása (%) (10)
0	1,54	1,62	0,0154	0,0162	0,983	0,980	1,029	2,012	1,58
1 - 4	6,08	6,39	0,0608	0,0639	3,881	3,864	4,057	7,938	6,23
5 - 9	7,43	7,81	0,0743	0,0781	4,743	4,723	4,959	9,702	7,62
10 - 14	7,24	7,61	0,0724	0,0761	4,622	4,602	4,832	9,454	7,43
15 - 19	7,06	7,40	0,0706	0,0740	4,507	4,475	4,699	9,206	7,23
20 - 24	6,88	7,20	0,0688	0,0720	4,392	4,354	4,572	8,964	7,04
25 - 29	6,70	6,99	0,0670	0,0699	4,277	4,227	4,438	8,715	6,84
30 - 34	6,52	6,79	0,0652	0,0679	4,162	4,106	4,311	8,473	6,65
35 - 39	6,34	6,59	0,0634	0,0659	4,047	3,985	4,184	8,231	6,46
40 - 44	6,16	6,38	0,0616	0,0638	3,932	3,858	4,051	7,983	6,27
45 - 49	5,96	6,15	0,0596	0,0615	3,805	3,719	3,905	7,710	6,06
50 - 54	5,74	5,86	0,0574	0,0586	3,664	3,543	3,720	7,384	5,80
55 - 59	5,49	5,48	0,0549	0,0548	3,505	3,314	3,480	6,985	5,49
60 - 64	5,18	4,98	0,0518	0,0498	3,307	3,011	3,162	6,469	5,08
65 - 69	4,75	4,34	0,0475	0,0434	3,032	2,624	2,755	5,787	4,54
70 - 74	4,11	3,52	0,0411	0,0352	2,624	2,128	2,234	4,858	3,82
75 - 79	3,20	2,53	0,0320	0,0253	2,043	1,530	1,607	3,650	2,87
80 -	3,62	2,35	0,0362	0,0235	2,311	1,421	1,492	3,803	2,99
Összesen:	100,00	100,00	1,0000	1,0000	63,839	60,464	63,487	127,326	100,00

Az élők átlagos életkora:

$$\begin{aligned} 37,37 \times 0,5014 &= 18,74 \\ 35,66 \times 0,4986 &= \underline{17,78} \\ &36,52 \text{ év.} \end{aligned}$$

A meghaltak átlagos életkora:

$$\begin{aligned} 76,37 \times \frac{63,837 \times 0,0106600}{127,324 \times 0,0110987} &= 36,78 \\ 71,32 \times \frac{63,487 \times 0,0115400}{127,324 \times 0,0110987} &= \underline{36,97} \\ &73,75 \text{ év.} \end{aligned}$$

A 0-14 éveseknek, a 60 éveseknek és ennél idősebbeknek a 15-59 évesekhez viszonyított aránya:

$$\begin{aligned} 0,759 \times 0,5014 &= 0,381 \\ 0,699 \times 0,4986 &= \underline{0,348} \\ &0,729. \end{aligned}$$

A születéskor várható átlagos élettartamnak (e_0^0) és a meghaltak átlagos életkorának ($\bar{e}$) eltérése:

$$\bar{e} \neq e_0^0, \text{ vagyis } 73,75 \neq 75,06,$$

mert a népesség nem stacionér, hanem évente 5 ‰-kel nő. Csak az $r = 0$ ‰-es évi növekedési rátájú, azonos halandósági színvonalú, mindkét nembeli stabil népességben lenne e_0^0 és $\bar{e}$ értéke is 75,06 év. Az $r = 5$ ‰-es évi növekedési rátájú stabil népesség korösszetétele fiatalabb az $r = 0$ ‰-es évi növekedési rátájú, azonos halandósági színvonalú stabil népességénél, ezért $\bar{e} < e_0^0$.

Ezzel le is zárjuk a stabil népesség jellemzőinek vizsgálatát annak hangsúlyozásával, hogy ez nagyobb matematikai szigorral és a stabil népesség egyéb jellemzőinek bevonásával is elképzelhető.* Ismételten említjük, hogy stabil népességben a korösszetétel változatlansága következtében a népesség átlagos életkora is változatlan, a halálozások kormegoszlásának változatlansága következtében pedig a meghaltak átlagos életkora is változatlan.

* A magyar nyelvű szakirodalomban lásd ezzel kapcsolatban a dr. Barsy Gyula és dr. Theiss Ede által írt: A stabil népességi modell és a dr. Theiss Ede által írt: A reprodukciós és termékenységi modellek továbbfejlesztése című fejezeteket a dr. Szabady Egon által szerkesztett: Bevezetés a demográfiába c. könyvben (Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1963.) (27, 28), dr. Vincze István már említett, Megjegyzések a népesség szám- szerű alakulásának vizsgálatához című tanulmányát a Demográfia 1963. évi 2. számában, (2), Tekse Kálmán már szintén idézett magasszínvonalú monográfiáját (3) és e disszertáció szerzőjének egyetemi jegyzeteit (11, 29).

Ez utóbbi - mint láttuk - a népesség kormegoszlása és a korszpecifikus halálozási arányszámok állandóságának következménye. E sajátosságok matematikai bizonyítására - brevitatis causa - részletesebben nem térhettünk ki.

Próbáljuk meg e fejezet utolsó pontjaként áttekinteni, hogy mi tulajdonképpen a stabil népesség modelljének a gyakorlati haszna?

7. A népességi modellek gyakorlati hasznosításának főbb területei

Kétségbevonhatatlan a modell tanulmányozásának un. didaktikai haszna. Világosan áttekinthető példáját szolgáltatja annak, hogyan alakul ki egy népesség a termékenység és halandóság bizonyos állandósult korszpecifikus jellemzőinek együttes hatására, s hogy milyen kapcsolatok vannak ez utóbbiak és e népesség korösszetétele, természetes népmozgalmi jellemzői és egyéb, e bevezető jellegű eszmefuttatásban nem elemzett sajátosságai között. E modell ismeretében könnyebben érthetők meg az un. kvázi stabil, félig stabil, destabilizálódó stb. népességének sajátosságai is, melyekről röviden még lesz szó, és könnyebben érthető meg a nem egyszer igen változatos fejlődési sajátosságokat mutató, nem modell népességek számos tulajdonsága is. A termékenység és halandóság különféle jellemzőinek alapulvételével kiszámított stabil népességi modellek kidolgozása során tisztázódott például, hogy a népesség öregedése csaknem kizárólag a termékenység csökkenésének, és csak igen kicsi, vagy semmilyen mértékben sem a halandósági színvonal süllyedésének, és az átlagos élettartam ebből adódó megnövekedésének következménye. Olyan stabil népességben, melyben a mindkét nembeli népesség születéskor várható átlagos élettartama 70,2 év, a 60 évesek, és ennél idősebbek aránya kb. 22,0 %, ha a bruttó reprodukciós együttható értéke 1, és csupán 2,6 %, ha a bruttó reprodukciós együttható értéke 4. A bruttó reprodukciós együttható 1-es nagyságú értéke mellett ugyanakkor 16,9 %-ot, 4-es nagyságú értéke mellett pedig 2,4 %-ot tesz ki a 60 évesek, és ennél idősebbek aránya, ha a születéskor várható átlagos élettartam 20 év. Könnyen belátható, hogy a 22,0 % és 2,6 %, továbbá a 16,9 % és 2,4 % közötti eltérések jóval jelentősebbek, mint a 22,0 % és a 16,9 %, valamint a 2,6 % és 2,4 % között.

Van bizonyos szerepe a stabil népesség modelljének az aktuális (adott) népesedési helyzet megítélése szempontjából is, amikor is a stabil népességmutató értékeit a termékenység és a halandóság aktuális korszpecifikus jellemzőinek felhasználásával azért számítjuk ki, hogy rávilágítsunk arra, mi lenne a távoli következménye annak, ha e jellemzők állandósulnának. Az 1959-1960. évi magyarországi adatok felhasználásával végzett számítások például 1-nél kisebb értékű bruttó és nettó reprodukciós együtthatót, negatív előjelű természetes szaporodási arányszámot stb. eredményeztek. Ha tehát a termékenység és halandóság e jellemzői állandósulnának, Magyarország népessége a távoli jövőben kihalna. A termékenység és halandóság korszpecifikus jellemzőinek ez a tulajdonsága az 1959-1960. évek népmozgalmi statisztikájából nem tűnik ki (a természetes szaporodás előjele pozitív

volt) a népesség aktuális korösszetételének a vonatkozó stabil korösszetételtől való különbözősége miatt. A stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népességi modellt a halandóság korszpecifikus jellemzői és az élveszületések abszolút száma állandósulása távoli következményeinek felmérése céljából lehet felhasználni. Az élveszületések abszolút száma Magyarországon 1959-1960-ban 148 828 főt tett ki (ennyi az 1959-ben és 1960-ban születettek összegének a fele), ami a mindkét nembeli népesség 1959-1960. évi 67,4 évet kitevő átlagos élettartamának állandósulása esetén $148\,828 \times 67,4 = 10\,031\,007$ főből álló népesség kialakulásához vezetne, amely 3,5 %-kal nagyobb Magyarország 9 961 044 főből álló 1960. január 1-i népességének számánál.

A születések abszolút száma állandósulásának szempontjából a reprodukció biztosítása nem tűnik fel olyan komor színben, mint a korszpecifikus termékenységi arányszámok állandósulásának szempontjából megítélve.

A stabil népesség modelljének az aktuális népesedési helyzet megítélésére való felhasználását számos bírálat érte, melyek közül csak John Hajnal, magyar származású angol demográfus véleményét idézzük. "Hosszu távon megítélni a jövőben várható népességfejlődést egy adott év körülményei fennmaradásának feltételezésével, vagyis olyan arányszámok alapulvételével, melyekről biztosan tudjuk, hogy nem maradnak változatlanok, nyilvánvalóan értelmetlen eljárás" - írja J. Hajnal.^{*} Hajnal részletesen kimutatja, hogy miként befolyásolják a korszpecifikus általános termékenységi arányszámoknak a nyugat-európai országokban a második világháború utáni évek alatti értékeit a férfiak nőkhez viszonyított arányában, s ebből adódóan a propagatív koru házasságok arányában a háború és a külső vándormozgalom következtében beálló változások, a termékenységüket szabályozó házasságok múltbeli és a jövőre vonatkozóan tervezett termékenységének (termékenységi naptárának) a módosulásai stb., s hogyan nyilvánultak meg ezek az átmeneti jellegű változások a naptári évi adatok alapján számított reprodukciós együtthatók értékének és születési sorszám szerinti strukturájának az alakulásában. A korszpecifikus termékenységi arányszámok változatlanságának feltételezésén túlmenően többé-kevésbé indokolatlan természetesen a valamely naptári év alatt észlelt korszpecifikus halandósági jellemzők változatlanságának a feltételezése is.

Hajnal helytelennek tartja a nettó reprodukciós együttható több éven át megfigyelt értékeinek, ill. ez utóbbiak átlagának a népesedési helyzet és népesedési perspektívák megítélésére való felhasználását is, mert:

1. tulajdonképpen nem dönthető el, hogy mely évek reprodukciós együtthatóinak az átlagát kell kiszámítanunk és minden bizonnyal megváltoznak ez utóbbiak termékenységi és halandósági komponensei is;

^{*} J. Hajnal: The Analysis of Birth Statistics in the light of the recent International Recovery of the Birth Rate. Population Studies, Vol. I., No. 2, 137-164. p. (30)

2. bizonyos átmeneti jellegűnek minősülő hatások, pl. a nemek közötti egyensúly hiányának a hatása, nem jelent szükségképpen csupán egy-két évig fennálló hatást, több év reprodukciós együttthatóinak értékét, ill. ez utóbbiak átlagát is befolyásolhatja, hatása a távolabbi népességfejlődés perspektívájából megítélve mégis csupán átmeneti jellegű; amennyiben viszont egy ilyen egyensúlyzavar tartósnak bizonyul (pl. a férfiak kivándorlásának rendszeressé válása esetében), akkor az ilyen feltételek mellett számított reprodukciós együttthatók értéke nem adhat felvilágosítást arról, hogy mi lenne ha ez az egyensúlyzavar nem létezne.

Hajnal a nupcialitási trendek és a házassági kohorszok termékenységének a tanulmányozását és egymással való egybevetését javasolja a szóban forgó elemzési célokra - a naptári időszakok adatai alapján becsült reprodukciós együttthatóknak a használata helyett.

Megjegyezzük, hogy bár Hajnal bírálatát teljes mértékben elfogadjuk, az általa kifogásolt mutatók egyikének: a bruttó reprodukciós együttthatóknak, ma mégis nagy jelentőséget tulajdonítunk, de nem a népesedési helyzet egészének, ill. a népesség fejlődési perspektívájának az általános megítélése szempontjából. Ez a mutató (és a bruttó teljes termékenység mutatója, melyből közvetlenül származik) ugyanis leányélveszületések ún. második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámait transzverzális összege mutatójaként is felfogható. Ez utóbbi pedig - és különösen a női népességet alkotó születési évjáratok termékenységi naptárai elemeinek a transzverzális összegével elosztott változata (R. Pressat korrekciós javaslata), ma is az általános termékenység mérésére szolgáló egyik legjobb transzverzális mutatónak tekinthető.

Magyarország népessége sincs - mint ismeretes - a stabilitás állapotában, és nem is tétélezhető fel, hogy a termékenység és a halandóság korszpecifikus jellemzői a jövőben hosszú ideig változatlanok maradnak, vagyis, hogy a stabilitás állapotának elérése bekövetkezik. Mégis úgy gondoljuk, hogy a stabil népesség mutatóinak kiszámítása alkalmas arra, hogy alakulásuk alapján egyfajta ítéletet alkossunk az aktuális termékenységi és halandósági viszonyokról. Fontosnak tartjuk ezen kívül Paul Vincent francia demográfus véleményét is, aki a népesség adott korösszetételéből adódó átmeneti növekedési, illetve csökkenési potenciál felmérésének gondolatát vetette fel. Vincent egy 1945-ben publikált tanulmányában többek között kimutatta, hogy milyen átmeneti fejlődésen menne keresztül India és Franciaország népessége a halandóság és a termékenység korszpecifikus jellemzőinek elméletileg feltételezett hirtelen megmerevedése után a történetileg kialakult, tényleges korösszetétele következtében a stacionár jellegnek, s amennyiben, a stabilitás egy speciális állapotának eléréséig. India népességének 1921. évi korösszetételében rejlő átmeneti növekedési potenciál indexe 1,44 volt, ami a népesség 44 %-os átmeneti növekedési lehetőségét jelezte, Franciaország népessége 1945. évi korösszetételének vonatkozó indexe pedig csupán 1,03-ot tett ki, elsősorban a születés gyakoriságának a megelőző másfél évszázadon át tartó csökkenése, s a népesség ebből adódó előregedése következtében bár, minthogy $1,03 > 1$. Franciaország népességének 1945. évi korösszetétele még mindig fiatalabb volt,

mint azé a stacionér népességé, melyé a kiválasztott korszpecifikus termékenységi és halandósági jellemzők hatására átalakult volna.* A növekedési (ill. csökkenési) potenciál kiszámítását legegyszerűbben úgy végezhetjük el, hogy a népesség adott korszpecifikus halandósági jellemzőihez a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi értékét biztosító, az adott termékenységi szintet realisztikusan jellemző korszpecifikus termékenységi arányszámokat rendelünk hozzá, s ezeknek a korszpecifikus halandósági és termékenységi jellemzőknek a felhasználásával népességlőreszámítást végzünk. Az eredményül kapott stacionér népesség létszámát - az index értékének kiszámítása céljából - elosztjuk az induló népességével. Ez természetesen a növekedési, ill. csökkenési potenciál kiszámításának csupán egyik, bár legegyszerűbbnek és legelterjedtebbnek tűnő módja. Több ország növekedési, illetve csökkenési potenciáljának kiszámítása és egymással való egybevetése során eléggé gyakran tetsszőleges, de minden ország esetében azonos korszpecifikus termékenységi és halandósági jellemzők felhasználásával végezzük a számítást és az országok népességének kezdeti létszámát azonosnak véve, az előreszámítás bármely szakaszában egybevetethetjük létszámukat (valamelyik ország népességének a létszámát egységnyinek véve). A létszámkülönbségek kizárólag a kezdeti korstrukturakülönbségekből adódnak, vagyis a növekedési, illetve csökkenési potenciál független a minden ország esetében azonosnak feltételezett korszpecifikus termékenységi és halandósági jellemzőktől (ez a tulajdonsága természetesen más számítási eljárások esetében is adótnak tekinthető).

A népesség növekedési, ill. csökkenési potenciálja mutatójának, mint a korösszetétel egyik jellemzőjének kétségtelenül nagy analitikai értéke, jelentősége van.

Bírálat érte a nettó reprodukciós együtthatót (R_0) is, amely - mint láttuk - azt mutatja, hogy hány leánygyermeket szül egy átlagos anya propagatív korának éve alatt, a halandóság hatásának figyelembevételével számítva. (A bruttó reprodukciós együttható ugyanezt - mint kitűnt - a halandóság hatásának figyelembevétele nélkül számítva mutatja.) A nettó reprodukciós együttható népszerűségét növelte, de jelentésének helyes értelmezését megzavarta az, hogy A. Lotka a mutatót beépítette a stabil népesség modelljébe. Stabil népességben amennyiben a valamely év alatt születettek számát (a szülő, illetve anya-születések számát) B -vel jelöljük, úgy a generáció távolságnak megfelelő T idő múlva $B(1+r)^T$ leánygyermek születésével számolhatunk, és a nettó reprodukciós együttható értéke, mint láttuk:

$$R_0 = \frac{B(1+r)^T}{B} = (1+r)^T.$$

Minthogy stabil népességben a nyers születési arányszám, a nyers halálozási arányszám, a természetes szaporodás, illetve fogyás arányszáma (r), a népesség korstrukturája, a halálozások kormegoszlása stb. egyaránt változatlan, a nettó reprodukciós együttható nem-

*P. Vincent: Potentiel d'accroissement d'une population. *Journal de la Société de Statistique de Paris*, 1945. évi 1-2. sz. (31). Továbbfejlesztését lásd Erland Hofsten professzor egy 1972-ben publikált tanulmányában. (32).

csak a születések számának, hanem a halálozások egyes koréveken (korcsoportokon) belüli számának és összes számának, a népesség egyes korévekhez (korcsoportokhoz) tartozó tagjai számának és összlétszámának stb. reprodukcióját (utánpótlását) is kifejezi. Megőrzi-e azonban ezt a sajátosságát nem stabil népességekben is? Nem őrzi meg! Pierre Depoid volt feltehetően az első, aki egyes franciaországi női születési kohorszok születéskori és tizenöt éves-kori létszámának, és az általuk szült leánygyermek születéskori és tizenöt éves-kori létszámának egybevetése kapcsán felhívta a figyelmet arra, hogy bár a leányszületések száma az anyaszületések számát bizonyos generációk esetében már nem pótolta, a leányszülöttek tizenöt éves-kori létszáma - kedvezőbb halandóságuk miatt - egyes esetekben ennek ellenére elérte, sőt meg is haladta az anyanemzedék 15-éves-kori létszámát. Ezzel kapcsolatban felhívta a figyelmet a halandósági viszonyok javulásának a reprodukció alakulásában betöltött szerepére.* Ebből az is következett, hogy a halandóság színvonalának változása esetén a reprodukció korrekt elemzése csak úgy történhet, ha a különböző korúak reprodukcióját külön-külön reprodukciós együtthatókkal mérjük, a reprodukció tehát egyetlen egy mutatóval nem mérhető. E helyzetből kiutat L. Henry-nak a leélt évek száma reprodukciójáról írott, 1965-ben publikált tanulmánya jelentett, mely a népesség összlétszáma reprodukciójának mérésére tett kísérletet nem stabil (tetszőleges!) népességfejlődés feltételezésével.** A népesség által valamely időszak (pl. év) alatt leélt évek száma megközelítőleg egyenlő a népesség időszakközépi számával. Amennyiben az időszak kezdetén (0-pontjában) a lakosok száma P , a végén (t -pontjában) pedig P' , az időszak alatti születések száma B , a halálozások száma pedig D , akkor az időszak alatt leélt évek száma:

$$t(P - D) + \frac{t}{2}(B + D) = Pt - Dt + \frac{B}{2}t + \frac{D}{2}t =$$

$$= Pt + \frac{B}{2}t - \frac{D}{2}t = Pt + t\left(\frac{B-D}{2}\right) = t\left(P + \frac{B-D}{2}\right),$$

és ha az időszak egy év, vagyis $t = 1$, akkor

$$t\left(P + \frac{B-D}{2}\right) = P + \frac{B-D}{2},$$

a népesség időszakközépi száma pedig szintén:

$$P + \frac{B-D}{2} = \frac{P+P'}{2}.$$

Annak, hogy a népesség száma változatlan maradjon, az a szükséges és elégséges feltétele, hogy az élveszületések évi számának és a születéskor várható átlagos élettartamnak a szorzata évről-évre változatlan maradjon, ha esetleg a tényezők abszolút értéke meg

* P. Depoid: Reproduction nette en Europe depuis l'origine des statistiques de l'état civil. Statistique générale de la France. Études démographiques No. 1., Paris, 1941. 42 p. (33).

** L. Henry: Réflexions sur les taux de reproduction. Population, 1965, No. 1, 53-69. p. (34).

is változik. Ez esetben ti. változatlan marad az egymást követő születési kohorszok által leélt összes évek száma is.* Az élveszületések számának csökkenését pl. részben, vagy egészben pótolhatja az átlagos élettartam növekedése, és fordítva. Történeti (longitudinális) aspektusban tekintve valamely generáció (születési kohorsz) létszámát akkor pótolja változatlan mennyiségben gyermekeinek generációja, ha az ez utóbbi által leélt összes évek száma azonos a szülő-generáció által leélt összes évek számával, akkor is, ha a gyermekek generációjának születésszáma kisebb a szülők generációjának születésszámánál, vagyis ha az un. nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke 1-nél kisebb. A változatlan volumenű reprodukciónak tehát - a T , vagyis a generációtávolság változatlansága esetén - az a feltétele, hogy az

$$R_v = \frac{T'_0}{T_0} = \frac{P'}{P} = \frac{B' \cdot e_0^{O'}}{B \cdot e_0^O} = R_0 \frac{e_0^{O'}}{e_0^O}$$

mutató értéke egységnyi legyen. A népességszám reprodukciójának ezen R_v -vel jelzett mutatójában új elemként szereplő T'_0 és $e_0^{O'}$ a gyermeknemzedék által leélt összes évek számát, illetve a gyermeknemzedék egy tagja által a születéskor várható átlagos élettartamot jelenti. T_0 és e_0^O a szülő-nemzedék vonatkozó mutatóit, R_0 pedig a szülő-nemzedék nettó reprodukciós együtthatóját, vagyis az egy szülő-születésre jutó gyermek-születések számát jelzi. A reprodukció fenti mutatójának 1-nél nagyobb értéke - ceteribus paribus - a népességszám növekedésére (bővített reprodukciójára), 1-nél kisebb értéke pedig csökkenésre (szűkített reprodukciójára) utal.

A népességszám reprodukciójának R_v -vel jelzett fenti mutatója alapján megállapítható, hogy a szóban forgó reprodukció a generációtávolság (T) változatlansága esetén akkor tekinthető bővítettnek, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél nagyobb értéke az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél szintén nagyobb, egységnyi, illetve a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egységet meghaladó arányánál az egységnél kisebb arányban alacsonyabb értékével jár együtt, továbbá, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél nagyobb értéke a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi, illetve az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értékének az egységet meghaladó arányánál az egységnél kisebb arányban alacsonyabb értékével párosul. A népesség számának reprodukciója változatlan, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke is, és az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke is egységnyi, továbbá ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke ugyanolyan arányban haladja meg az egységet, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egység alatt van, illetve e hányados értéke van ugyanolyan arányban az egység felett, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egység alatt. Végül a népességszám szűkített reprodukciójára akkor ke-

*Louis Henry eme megállapítását kommentálva Jean Bourgeois-Pichat illusztrációként felhossa, hogy amennyiben például a jelenlegi franciaországi halandósági viszonyokat vesszük alapul, s a mindkét nembeli népesség születéskor várható átlagos élettartamát 70 évre vesszük ($e_0^O = 70,0$ év), megállapíthatjuk, hogy egy 850 000 főt számláló születési évjárat összesen $70 \times 850\,000 = 59,5$ millió évet élne le. Amennyiben a népességfejlődés olyan lenne, hogy az egymást követő születési évjáratok mindegyike 59,5 millió évet élne le, a népesség száma állandósulna, s az állandósult népességszám 59,5 millió főt tenne ki. (35).

rül sor, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél kisebb értéke az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél szintén kisebb, egységnyi, illetve a nettó reprodukciós együttható (R_0) értékének az egység alatti arányánál az egységet kisebb arányban meghaladó értékével jár együtt, továbbá ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél kisebb értéke a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi, illetve az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értékének egység alatti arányánál az egységet kisebb arányban meghaladó értékével párosul.

A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél nagyobb értéke a fentiek alapján csak akkor jelenti a népesség számának bővített reprodukcióját, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke egységnyinél szintén nagyobb, egységnyi, illetve az egységnél kisebb arányban alacsonyabb, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egységet meghaladja. A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél nagyobb értéke a népesség számának változatlan reprodukciójával jár együtt, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke ugyanakkor ugyanolyan arányban van az egység alatt, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható értéke az egység felett. A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél nagyobb értéke a népesség számának szűkített reprodukciójával jár együtt, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke nagyobb arányban van az egység alatt, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egységet meghaladja. A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi értéke csak akkor jelenti a népesség számának változatlan reprodukcióját, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke is egységnyi. Ha ez utóbbi értéke egységnyinél nagyobb, a népesség számának reprodukciója bővített, ha pedig egységnyinél kisebb, a népesség számának reprodukciója szűkített egységnyi értékű nettó reprodukciós együttható (R_0) esetében is. A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél kisebb értéke csak abban az esetben jelenti a népesség számának szűkített reprodukcióját, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke egységnyinél szintén kisebb, egységnyi, illetve az egységnél kisebb arányban nagyobb, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egység alatt van. A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél kisebb értéke a népesség számának változatlan reprodukciójával jár együtt, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke ugyanakkor ugyanolyan arányban haladja meg az egységet, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egység alatt van. A nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyinél kisebb értéke a népesség számának bővített reprodukciójával jár együtt, ha az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke ugyanakkor nagyobb arányban van az egység felett, mint amilyen arányban a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egység alatt.

Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél nagyobb értéke hasonló módon csak akkor jelenti a népesség számának bővített reprodukcióját, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke az egységnyinél szintén nagyobb, egységnyi, illetve az egységnél kisebb arányban alacsonyabb, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egységet meghaladja. Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél nagyobb értéke a népesség számának változatlan reprodukciójával jár együtt, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke ugyanakkor ugyanolyan arányban van az egység alatt, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egység felett. Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél nagyobb értéke a népesség számának szűki-

tett reprodukciójával jár együtt, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke nagyobb arányban van az egység alatt, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egységet meghaladja. Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyi értéke csak akkor jelenti a népesség számának változatlan reprodukcióját, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke is egységnyi. Ha ez utóbbi értéke egységnyinél nagyobb, a népesség számának reprodukciója bővített, ha pedig egységnyinél kisebb, a népesség számának reprodukciója szűkített az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyi értékének esetében is.

Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél kisebb értéke csak abban az esetben jelenti a népesség számának szűkített reprodukcióját, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke egységnyinél szintén kisebb, egységnyi, illetve az egységnyinél kisebb arányban nagyobb, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egység alatt van. Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél kisebb értéke a népesség számának változatlan reprodukciójával jár együtt, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke ugyanakkor ugyanolyan arányban haladja meg az egységet, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egység alatt van. Az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados egységnyinél kisebb értéke a népesség számának bővített reprodukciójával jár együtt, ha a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke nagyobb arányban van az egység felett, mint amilyen arányban az $e_0^{O'} : e_0^O$ hányados értéke az egység alatt.

Beépíthető-e leélt évek száma reprodukciójának együtthatója a stabil népesség modelljébe? Igen, beépíthető. Minthogy stabil népességben

$$e_0^{O'} = e_0^O ; \quad e_0^{O'} - e_0^O = 0 ,$$

$$R_v = R_0 \frac{e_0^{O'}}{e_0^O} = R_0 ,$$

vagyis stabil népességben a leélt évek száma reprodukciójának együtthatója azonosul a nettó reprodukciós együtthatóval, és ez utóbbinak minden funkcióját betölti. Nem stabil népességben a népességszám reprodukcióját méri; a születések számának, a különböző koruak számának, a különböző koruak halálozási számának és a halálozások összes számának stb. reprodukcióját külön-külön kell mérnünk speciálisan kialakított, longitudinális aspektusban értelmezett mutatókkal.

Louis Henry a fentiekben bemutatott R_v jelzésű mutatóját számos bírálat érte, többek között az, hogy:

- az átlagos élettartam növekedési perspektíváinak a korlátozottsága miatt a kedvező (alacsony) halandóságu országokban alkalmazásának már alig lenne gyakorlati jelentősége (Jean Bourgeois-Pichat bírálata);

- a transzverzális és a kohorsz nettó reprodukciós együtthatóhoz hasonlóan szintén nem számol a külső vándorlások hatásával;

- nem veszi figyelembe a népesség tényleges, történetileg kialakult korstrukturáját, ezért a népességszám alakulásának (dinamikájának) tanulmányozása egyszerű népesség-előreszámítások lebonyolításával kielégítőbben oldható meg, mint a R_v felhasználásával végzett számítások után;

- stb.

A R_v mutató természetesen ez utóbbi észrevételek alapján korrigálható. Minthogy azonban a reprodukció mérése nem stabil népességben is elsőrendű fontosságu, a R_0 (a nettó reprodukciós együttható) pedig erre a célra bizonyítottan nem alkalmas, kétségtelen, hogy a R_v mutatónak és az analógiájára kreált hasonló mutatóknak van az általános reprodukciómérés szempontjából elsősorban jelentősége.

A népesedési jelenségek longitudinális szemlélete azt is lehetővé teszi, hogy a stabil népesség, és a stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népesség korábban csupán a transzverzális megfigyelés aspektusából definiált tulajdonságait újszerű módon közelítsük meg, határozzuk meg.

A stabil népesség az egyes generációk által leélt évek szempontjából tekintve olyan népességgént is meghatározható, melyben az egymást követő születési évjáratok (generációk) által leélt évek száma évjáratról-évjáratra (születési kohorszról - születési kohorszra) azonos irányban és arányban változik (nö, illetve csökken), a leélt évek életkor szerinti megoszlása (naptára) pedig minden születési évjárat (generáció) esetében azonos. A különböző életkorhoz tartozás állapotában leélt évek száma tehát születési évjáratról-születési évjáratra (generációról-generációra) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint az egyes évjáratok által összesen leélt évek száma. Minthogy stabil népességben a születéskor várható átlagos élettartam értéke minden generációban azonos, az egyes születési évjáratok által összesen leélt évek számának változása kizárólag a vonatkozó évjáratok születéskori számának (születésszámának) változásából adódhat, * vagyis stabil népességben az élveszületések száma születési évjáratról-születési évjáratra (generációról-generációra) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint az általuk összesen leélt évek száma. A stabil népességnek ez a sajátossága abból adódik, hogy a korszpecifikus termékenységi arányszámok minden születési évjáratban (generációban) azonosak (s emiatt azonos minden generációban az anyák átlagos életkora is gyermekeik megszületésekor). Azonosak - mint ismeretes - minden születési évjáratban (generációban) a korszpecifikus halálozási arányszámok is (s így a meghaltak átlagos életkora is), ezért a halálozások száma is évjáratról-évjáratra (generációról-generációra) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint az összesen leélt évek száma. Minthogy minden újszülött halandó, az egyes születési évjáratokban előforduló halálozások száma zárt népességben azonos a vonatkozó évjáratok születéskori számával (születésszámával). Stabil népességben tehát az egyes születési évjáratokban (gene-

* Jeleztük, hogy az egyes születési évjáratok által leélt évek száma születésszámuknak és születéskor várható átlagos élettartamuknak szorzataként is definiálható.

rációkban) a születésszám és a halálozások száma, valamint az összesen leélt évek száma közötti arány (a születési és a halálozási arányszám) azonos, időben változatlan, és egymással egyenlő. E sajátosságok következtében a népességet időpontról-időpontra, illetve naptári időszakról-naptári időszakra (pl. naptári évről-naptári évre), vagyis transzverzálisan megfigyelve azt találjuk, hogy

- a népesség száma időszakról-időszakra (pl. évről-évre) ugyanolyan irányban és arányban változik (nö, illetve csökken);

- az élveszületések és halálozások száma is időszakról-időszakra (pl. évről-évre) ugyanolyan irányban és arányban változik, s ez az irány és arány azonos a népességszám változásának irányával és arányával: a nyers születési és halálozási arányszám tehát időben változatlan (állandó);

- a korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok transzverzálisan mérve időben változatlanok, és azonosak az egyes születési évjáratokban megfigyelhetőkkel;

- a népesség korösszetétele időben változatlan, de nem szükségképpen azonos az egyes születési évjáratok egymáséval azonos, időben szintén változatlan korösszetételével, mert a különböző korúak száma különböző születésszámú születési évjáratok (generációk) a megfigyelés időpontjáig továbbélőiből is származhat, ezért:

- az élveszületések és halálozások száma időszakról-időszakra (pl. évről-évre) ugyanolyan irányban és arányban változik ugyan, de az egyes időszakok (pl. évek) alatti számuk nem szükségképpen egyenlő egymással;

- a nyers születési és halálozási arányszám időben változatlan ugyan, de nem szükségképpen egyenlő egymással és az egyes születési évjáratokban megfigyelhetőkkel; a köztük lévő különbség: a természetes szaporodás intrinszc arányszáma tehát állandó ugyan, de nem szükségképpen egyenlő zérussal;

- a korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok, valamint a korösszetétel változatlansága következtében időben változatlan ugyan az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor, és változatlan a meghaltak átlagos életkora is, de ezek az átlagos életkorok nem szükségképpen azonosak az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhetőkkel stb.

A zérus szaporodási rátájú stabil népességben, vagyis a stacionér népességben az egymást követő születési évjáratok (generációk) által leélt évek száma azonos. Azonos a különböző életkorhoz tartozás állapotában leélt évek aránya és abszolút nagysága is. Minthogy a születéskor várható átlagos élettartam nagysága minden generációban azonos, az egyes születési évjáratok által leélt évek számának változatlansága kizárólag a vonatkozó évjáratok születéskori száma (születésszáma) változatlanságának lehet a következménye. Minden születési évjáratban (generációban) azonos a halálozások száma is, és egyenlő az élveszületések szintén változatlan számával. A születési és halálozási arányszám tehát minden születési évjáratban azonos és egyenlő egymással. A korszpecifikus termékenységi és halá-

lozási arányszámok változatlanságai következtében minden születési évjáratban (generációban) azonos az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor, és a meghaltak átlagos életkora. E sajátosságokból adódik, hogy a népességet időpontról-időpontra, illetve időszakról-időszakra (pl. naptári évről-naptári évre), vagyis transzverzálisan megfigyelve és elemzve is pontosan azt állapíthatjuk meg, amit bármely születési évjárat (generáció) megfigyelése és elemzése alapján, vagyis, hogy:

- a népesség száma időben változatlan, és azonos az egyes születési évjáratok (generációk) által leélt évek szintén változatlan számával;

- az élveszületések és a halálozások száma időben változatlan, egymással egyenlő nagyságu, és azonos az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, egymással szintén változatlan és egyenlő nagyságu számával;

- a nyers születési és halálozási arányszám időben szintén változatlan, egymással szintén egyenlő nagyságu, és azonos az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető szintén változatlan és egymással szintén egyenlő nagyságu születési és halálozási arányszámokkal;

- a korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok időben változatlanok, és azonosak az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, szintén változatlan korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámokkal;

- a népesség korösszetétele és a különböző koruak abszolút száma is változatlan, és azonos a különböző születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, szintén állandó korösszetétellel, és a különböző életkorhoz tartozás állapotában leélt évek számával;

- az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor és a meghaltak átlagos életkora időben változatlan, és azonos a különböző születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető vonatkozó átlagos életkorokkal stb.

A stabil népesség és a stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népesség az egyre inkább teret hódító kohorsz-szemlélet alapján definiálható sajátosságait, és ez utóbbiaknak a hagyományosan, a transzverzális szemlélet alapján definiált, ismert sajátosságaival való kapcsolatait a fentiekben csupán igen röviden és csak szóbelileg jellemeztük, elsősorban a problematika egészének kitérés-jellege miatt. A további fejezetekben a fentiekben vázolt, ezzel kapcsolatos gondolatainkat azonban matematikailag is megfogalmazzuk és elmélyítjük.

Térjünk vissza e kitérő után a stabil népesség modellje felhasználási területeinek vizsgálatára.

Köztudott, hogy jelentős szerepet játszik a stabil népesség modellje bizonyos népességek multjának és bizonyos népességek jelenének megismerésében is. A multbeli népességfejlődés megismerésében elsősorban a stacionér népesség jellemzőinek ismerete nyújt segítséget, amennyiben elfogadjuk, hogy a világ legtöbb országának népessége kb.

300 évvel ezelőttig, ha számát háborúk, járványok és éhínség brutálisan nem tizedelte meg, nagyjából stacionér volt, igen magas termékenységet igen magas halandósága ellensúlyozta. Amennyiben tehát sikerül például egy ilyen népesség temetőjét feltárnunk, és megállapítanunk a valamely időszak alatt meghaltak számát és életkorát, úgy a stacionér népességről leírtak értelmében rekonstruálhatóvá válik a népesség száma, korösszetétele és fontosabb természetes népmozgalmi jellemzői is.*

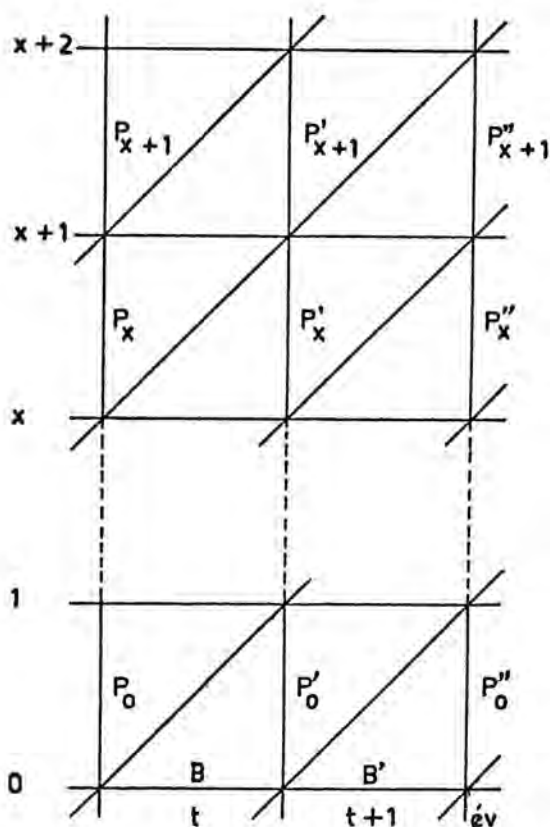
A jelenleg élő népességek megismerését a stabil népesség modellje annyiban segíti elő, amennyiben a tényleges, un. kvázi-stabil, illetve félig stabil népességek esetében lehetővé teszi egyrészt a hiányzó népmozgalmi adatok pótlását, másrészt a meglévő, de hibás, nem pontos adatok korrekcióját. Kvázi-stabilnak az olyan népességet nevezzük, melyben a korszpecifikus termékenységi arányszámok lényegében változatlanok, a halandóság pedig régóta, fokozatosan, lassan csökken, aminek alig van hatása a népesség korstruktúrájára. A kvázi-stabil népesség tényleges jellemzői nem térnek el jelentősen a termékenység és a halandóság korszpecifikus jellemzői alapján kiszámított elméleti stabil népesség jellemzőitől. Egy országban például a termékenység a 3-as nagyságu bruttó reprodukciós együtthatóval jellemezhető szinten áll ($R = 3$), az átlagos élettartam (e_0^O) pedig az elmúlt évtizedek folyamán 40,0 évről 60,4 évre növekedett. Egy felmérés és az $R = 3$ és $e_0^O = 60,4$ jellemzők alapján kiszámított stabil népességből kitűnt, hogy míg a felmérés alapján a 0-14 évesek aránya 45,4 %-ot, a 15-59 évesek aránya 49,7 %-ot, a 60 évesek és ennél idősebbek aránya 4,9 %-ot tesz ki, a kiszámított stabil népességben a 0-14 évesek aránya 46,0 %-ot, a 15-59 éveseké 49,6 %-ot, a 60 éveseké és ennél idősebbeké pedig 4,4 %-ot tesz ki. Ugyanigy az ország népmozgalmi statisztikája alapján a nyers születési arányszám 43,6 ‰-et, a nyers halálozási arányszám 9,8 ‰-et, a természetes szaporodás arányszáma pedig 33,8 ‰-et tesz ki, a kiszámított stabil népesség nyers születési arányszáma viszont 43,8 ‰-et, a nyers halálozási arányszáma a 9,6 ‰-et, természetes szaporodási arányszáma pedig 34,2 ‰-et tesz ki. Az eltérések tehát valóban nem nagyok, és az esetleg hiányzó, illetve hibás népmozgalmi adatok a stabil modell felhasználásával valóban pótolhatók, illetve korrigálhatók lennének.

Mi a magyarázata a kvázi-stabil népesség jelzett sajátosságai kialakulásának? Az I. 4. ábra - Louis Henry egy hasonló ábrájának analógiájára** - a t és $t+1$ naptári évek elején betöltött évek száma alapján 0 éves, x és $x+1$ éves lakosok számát (P_0 , P_x és P_{x+1} a t naptári év elején; P_0' , P_x' és P_{x+1}' a $t+1$ naptári év elején), valamint a t naptári év alatt születettek számát (B) és a $t+1$ naptári év alatt születettek számát (B') tünteti fel a demográfiai hálózatba beírt formában. A t . évre vonatkozóan a természetes szaporodási arányszámot r -rel, a perspektivikus korszpecifikus halálozási

* Lásd erről dr. Acsádi György és dr. Nemeskéri János: *History of Human Life Span and Mortality* (A halandóság és az emberi élettartam története) c., az Akadémiai Kiadó gondozásában 1970-ben, angol nyelven megjelent könyvét, (36).

** Lásd Louis Henry: *Démographie. Analyse et modèles*. c., a Librairie Larousse által 1972-ben, Párizsban kiadott könyvének 265. oldalán található ábrát, és az ezt követő eszmefuttatást (265-268. p.) (37).

I. 4. A KÜLÖNBÖZŐ KORUAK ÉVELEJI SZÁMÁNAK ÉS AZ ÉLVESZÜLETÉSEK SZÁMÁNAK ALAKULÁSA A t ÉS A $t+1$ NAPTÁRI ÉVEKBEN
(L. Henry nyomán)



valószínűséget Q_x -szel, az újszülöttek elhalálozási valószínűségét a következő év január elsejéig Q_b -vel, annak valószínűségét, hogy az év folyamán x -éves egzakt életkort betöltöttek a következő év január elsejéig továbbélnek Z_x -szel, a $t+1$. évi azonos jelentésű mutatókat pedig r' -vel, Q'_x -szel, Q'_b -tel, Z'_x -tel jelölve megállapíthatjuk, hogy:

$$P'_{x+1} = (1+r) P_{x+1} = (1-Q_x) P_x$$

$$P'_x = (1+r) P_x = (1-Q_{x-1}) P_{x-1}$$

$$P'_1 = (1+r) P_1 = (1-Q_0) P_0$$

$$P'_0 = (1+r) P_0 = (1-Q_b) B$$

és

$$P_{x+1} = \frac{(1-Q_x) P_x}{1+r} = \frac{P'_{x+1}}{1+r} = \frac{P'_{x+2}}{(1-Q_{x+1})} = \frac{(1+r) P_{x+2}}{(1-Q_{x+1})}$$

$$P_x = \frac{(1-Q_{x-1}) P_{x-1}}{1+r} = \frac{P'_x}{1+r} = \frac{P'_{x+1}}{(1-Q_x)} = \frac{(1+r) P_{x+1}}{(1-Q_x)}$$

$$P_1 = \frac{(1-Q_o) P_o}{1+r} = \frac{P'_1}{1+r} = \frac{P'_2}{(1-Q_1)} = \frac{(1+r) P_2}{(1-Q_1)}$$

$$P_o = \frac{(1-Q_b) B}{1+r} = \frac{P'_o}{1+r} = \frac{P'_1}{(1-Q_o)} = \frac{(1+r) P_1}{(1-Q_o)} .$$

Megállapítható továbbá, hogy:

$$(1+r) P_o = (1-Q_b) B$$

$$(1+r) P_1 = (1-Q_o) P_o = \frac{(1-Q_b) (1-Q_o) B}{1+r}$$

$$(1+r)^2 P_2 = (1-Q_o) (1-Q_1) P_o = \frac{(1-Q_b) (1-Q_o) (1-Q_1) B}{1+r}$$

$$(1+r)^x P_x = (1-Q_o) \dots (1-Q_{x-1}) P_o = \frac{(1-Q_b) (1-Q_o) \dots (1-Q_{x-1}) B}{1+r}$$

$$(1+r)^{x+1} P_{x+1} = (1-Q_o) \dots (1-Q_x) P_o = \frac{(1-Q_b) (1-Q_o) \dots (1-Q_x) B}{1+r} ,$$

vagyis

$$(1+r) P_o = (1-Q_b) B = Z_o B$$

$$(1+r)^2 P_1 = (1-Q_b) (1-Q_o) B = Z_1 B$$

$$(1+r)^3 P_2 = (1-Q_b) (1-Q_o) (1-Q_1) B = Z_2 B$$

$$(1+r)^{x+1} P_x = (1-Q_b) (1-Q_o) \dots (1-Q_{x-1}) B = Z_x B$$

$$(1+r)^{x+2} P_{x+1} = (1-Q_b) (1-Q_o) \dots (1-Q_x) B = Z_{x+1} B,$$

s ebből adódóan:

$$P_o = \frac{Z_o B}{1+r} = B (1+r)^{-1} Z_o$$

$$P_1 = \frac{Z_1 B}{(1+r)^2} = B (1+r)^{-2} Z_1$$

$$P_2 = \frac{Z_2 B}{(1+r)^3} = B (1+r)^{-3} Z_2$$

$$P_x = \frac{Z_x B}{(1+r)^{x+1}} = B (1+r)^{-x-1} Z_x$$

$$P_{x+1} = \frac{Z_{x+1} B}{(1+r)^{x+2}} = B (1+r)^{-x-2} Z_{x+1} .$$

Figyelembe véve azonban, hogy azok, akik a t naptári év elején 0 évesek, a $t-1$. évi születési kohorszból, akik 1 évesek, a $t-2$. évi születési kohorszból, akik 2 évesek, a $t-3$. évi születési kohorszból, akik x -évesek, a $t-1-x$. évi születési kohorszból, akik $x+1$ évesek, a $t-1-(x+1)$. évi születési kohorszból származnak, megállapítható, hogy amennyiben a népességet stabilnak tekintjük:

$$P_0 = B_{t-1} Z_0 = B (1+r)^{-1} Z_0$$

$$P_1 = B_{t-2} Z_1 = B (1+r)^{-2} Z_1$$

$$P_2 = B_{t-3} Z_2 = B (1+r)^{-3} Z_2$$

$$-----$$

$$P_x = B_{t-1-x} Z_x = B (1+r)^{-x-1} Z_x$$

$$P_{x+1} = B_{t-1-(x+1)} Z_{x+1} = B (1+r)^{-x-2} Z_{x+1}$$

Az olyan népességnek tehát, melynek korösszetétele változatlan, minden naptári év elején olyan kormegoszlásúnak kell lennie, mint amilyen kormegoszlású a vonatkozó évi halandósági színvonal és a természetes szaporodási arányszám alapján kiszámítható stabil népesség.

A $t+1$ év elejére kialakuló korösszetétel a $t+1$. évi halandósági színvonalnak és természetes szaporodási arányszámnak felel meg, vagyis:

$$P'_0 = B' (1+r')^{-1} Z'_0 = P_0 (1+r) = (1+r) B (1+r)^{-1} Z_0$$

$$P'_1 = B' (1+r')^{-2} Z'_1 = P_1 (1+r) = (1+r) B (1+r)^{-2} Z_1$$

$$P'_2 = B' (1+r')^{-3} Z'_2 = P_2 (1+r) = (1+r) B (1+r)^{-3} Z_2$$

$$-----$$

$$P'_x = B' (1+r')^{-x-1} Z'_x = P_x (1+r) = (1+r) B (1+r)^{-x-1} Z_x$$

$$P'_{x+1} = B' (1+r')^{-x-2} Z'_{x+1} = P_{x+1} (1+r) = (1+r) B (1+r)^{-x-2} Z_{x+1} .$$

Megállapítható tehát, hogy:

$$B' (1+r')^{-1} Z'_0 = B Z_0$$

$$B' (1+r')^{-2} Z'_1 = B (1+r)^{-1} Z_1$$

$$B' (1+r')^{-3} Z'_2 = B (1+r)^{-2} Z_2$$

$$B' (1+r')^{-x-1} Z'_x = B (1+r)^{-x} Z_x$$

$$B' (1+r')^{-x-2} Z'_{x+1} = B (1+r)^{-x-1} Z_{x+1},$$

s ebből adódóan

$$\frac{P'_1}{P'_0} = \frac{B' (1+r')^{-2} Z'_1}{B' (1+r')^{-1} Z'_0} = \frac{B (1+r)^{-1} Z_1}{B Z_0} = \frac{Z'_1}{Z'_0} \cdot \frac{1}{1+r'} = \frac{Z_1}{Z_0} \cdot \frac{1}{1+r}$$

$$\frac{P'_2}{P'_1} = \frac{B' (1+r')^{-3} Z'_2}{B' (1+r')^{-2} Z'_1} = \frac{B (1+r)^{-2} Z_2}{B (1+r)^{-1} Z_1} = \frac{Z'_2}{Z'_1} \cdot \frac{1}{1+r'} = \frac{Z_2}{Z_1} \cdot \frac{1}{1+r}$$

$$\frac{P'_x}{P'_{x-1}} = \frac{B' (1+r')^{-x-1} Z'_x}{B' (1+r')^{-x} Z'_{x-1}} = \frac{B (1+r)^{-x} Z_x}{B (1+r)^{-x+1} Z_{x-1}} = \frac{Z'_x}{Z'_{x-1}} \cdot \frac{1}{1+r'} = \frac{Z_x}{Z_{x-1}} \cdot \frac{1}{1+r}$$

$$\frac{P'_{x+1}}{P'_x} = \frac{B' (1+r')^{-x-2} Z'_{x+1}}{B' (1+r')^{-x-1} Z'_x} = \frac{B (1+r)^{-x-1} Z_{x+1}}{B (1+r)^{-x} Z_x} = \frac{Z'_{x+1}}{Z'_x} \cdot \frac{1}{1+r'} = \frac{Z_{x+1}}{Z_x} \cdot \frac{1}{1+r},$$

vagyis:

$$\frac{1 - Q'_0}{1 + r'} = \frac{1 - Q_0}{1 + r}$$

$$\frac{1 - Q'_1}{1 + r'} = \frac{1 - Q_1}{1 + r}$$

$$\frac{1 - Q'_{x-1}}{1 + r'} = \frac{1 - Q_{x-1}}{1 + r}$$

$$\frac{1 - Q'_x}{1 + r'} = \frac{1 - Q_x}{1 + r}$$

és

$$B (1-Q_b) = (1+r) P_o = P_o' = \frac{B' Z_o'}{1+r'} = \frac{B' (1-Q_b)}{1+r'}.$$

Megállapítható tehát, hogy:

$$\frac{1-Q_o'}{1-Q_o} = \frac{1+r'}{1+r}$$

$$\frac{1-Q_1'}{1-Q_1} = \frac{1+r'}{1+r}$$

$$\frac{1-Q_{x-1}'}{1-Q_{x-1}} = \frac{1+r'}{1+r}$$

$$\frac{1-Q_x'}{1-Q_x} = \frac{1+r'}{1+r},$$

vagyis valamely év január elsejétől a következő év január elsejéig való továbbélés valószínűségei (a perspektivikus továbbélési valószínűségek) az életkortól függetlenül olyan arányban térnek el egymástól, mint az $(1+r')$ és $(1+r)$ tényezők:

$$\frac{1-Q'}{1-Q} = \frac{1+r'}{1+r},$$

vagyis

$$Q' - Q + Q' r - Q r' = r - r'$$

Minthogy $(Q' - Q)$ a Q -hoz képest kicsi, nem követünk el nagy hibát, ha a $Q' r$ szorzatot a $Q r$ szorzattal helyettesítjük, vagyis:

$$Q' - Q = r - r' - Q r + Q r' = (r - r') (1 - Q),$$

s ebből

$$r - r' = \frac{Q' - Q}{1 - Q} = \frac{(1 - Q) - (1 - Q')}{1 - Q}.$$

Az $(1 - Q_x)$ perspektivikus továbbélési valószínűség viszonylagos nagyságának valamely év január 1-től a következő év január 1-ig megfigyelhető változása minden, a betöltött évek száma alapján mért életkor esetében egyenlő a természetes szaporodási arányszám ugyanazon évi és következő évi értéke közötti különbséggel.

Térjünk vissza Q_b -hez. Amennyiben f_x -szel jelöljük azoknak a nőknek az időben változatlan korszpecifikus termékenységi arányszámait, akik egy bizonyos év folyamán az x -éves egzakt életkort elérik, megállapíthatjuk, hogy

$$B = \sum_x f_x \frac{P_x + P'_{x+1}}{2}$$

és

$$B' = \sum_x f_x \frac{P'_x + P''_{x+1}}{2} ,$$

ahol P'' a $t+1$. év végére, illetve a $t+2'$. év elejére kialakuló népességszám. A P' népességszám a P népességszám $(1+r)$ -szerese, a P'' pedig a P' -nek $(1+r')$ -szerese.

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sum_x P_x f_x}{2} + \frac{\sum_x P_x (1+r) f_x}{2} = (1 + \frac{r}{2}) \sum_x P_x f_x \\ B'' &= \frac{\sum_x P'_x f_x}{2} + \frac{\sum_x P'_x (1+r') f_x}{2} = \\ &= (1 + \frac{r'}{2}) \sum_x P'_x f_x = (1 + \frac{r'}{2}) (1+r) \sum_x P_x f_x , \end{aligned}$$

s ebből adódóan:

$$\frac{B'}{B} = (1+r) \frac{1 + \frac{r'}{2}}{1 + \frac{r}{2}} .$$

Láttuk, hogy

$$B (1 - Q_b) = \frac{B' (1 - Q'_b)}{1 + r'} ,$$

ebből adódik, hogy:

$$\frac{B (1 - Q_b)}{B' (1 - Q'_b)} = \frac{1}{1+r'} ,$$

vagyis

$$\frac{(1 + \frac{r}{2}) (1 - Q_b)}{(1+r) (1 + \frac{r'}{2}) (1 - Q'_b)} = \frac{1}{1 + r'} ,$$

s ennek alapján:

$$\frac{1 - Q_b}{1 - Q'_b} = \frac{1 + r}{1 + r'} \cdot \frac{1 + \frac{r'}{2}}{1 + \frac{r}{2}} ,$$

amit ha r és r' értékei elég kicsik, így is írhatunk:

$$\frac{1 - Q_b}{1 - Q'_b} = \frac{1 + \frac{r}{2}}{1 + \frac{r'}{2}} .$$

Megállapítható tehát, hogy

$$\frac{(1 - Q_b) - (1 - Q'_b)}{1 - Q_b} = \frac{r - r'}{2}.$$

Az $(1 - Q_b)$ változásának viszonylagos nagysága tehát egyenlő a természetes szaporodási arányszám abszolút nagysága változásának felével.

Megjegyzendő, hogy a kvázi-stabil népesség csupán specifikus esetét képezi az un. félig stabil népességnek, mely utóbbin olyan változatlan korösszetételű népességet értünk, melyre a stabil népességnek csak bizonyos tulajdonságai jellemzők, de e tulajdonságok alapján alkalmas számos fejlődő ország népességének megismerésére. Jelentősége abból is kitűnik, hogy jelenleg a világ népességének kb. háromnegyed része félig stabil állapotban levőnek tekinthető. A kvázi-stabil és félig stabil népességek fogalmának kidolgozása több, ma is élő, kiváló demográfus nevéhez fűződik: Ansley J. Coale már idézett (16), és két további munkáján (38, 39) kívül elsősorban Jean Bourgeois-Pichat nevét kell ezzel kapcsolatban megemlítenünk*, a népességi modellekkel kapcsolatos elméleti tudnivalók rendszerezett összefoglalását adó újabb könyve pedig Wilhelm Winkler nevének felidézését is indokoltá teszi. (42). Abou Gamrah a közelmúltban közzétett tanulmánya Coale és Demény módszertani javaslatainak (38) továbbfejlesztését tartalmazza Guillaume Wunsch ama felismeréséből kiindulva, hogy a népesség stabilitása jellemzőinek és ténylegesen megfigyelhető jellemzőinek különbsége függ a termékenység és a halandóság változásának időtartamától és intenzitásától is, s hogy ez a különbség a stabil modellel végzett becslések pontosságát is csökkentheti (44). A különbséget ezért - írja Abou Gamrah (43) - un. korrekciós tényezők beiktatásával ki kell küszöbölnünk. Egyelőre csak a halandóság süllyedését figyelembe vevő korrekciós tényezők meghatározására szorítkozunk.

Egy állandó termékenységgű és fokozatosan csökkenő halandóságu népesség demográfiai paramétereinek becslésére - mint jeleztük - a stabil népességi modell bizonyos korrekciókkal elég nagy biztonsággal használható. A termékenység becslésére vonatkozó korrekciók Coale és Demény az ENSZ által is közzétett: Méthodes permettant d'estimer les mesures démographiques fondamentales à partir de données incomplètes (Nations Unies, 1967., Manuel IV, 126. p.) című (38) már klasszikusnak számító módszere szerint elsősorban a nyers születési arányszám és a bruttó reprodukciós együttható értékének korrekcióját jelentik. (I. a kiadvány III. 1. tábláját) Az un. korrekciós "arányok" a halandóság süllyedésének különböző hosszúságu időszakaira (5, 10, ..., 40 év) vonatkoznak a $k = 0,01$ fennforgásának feltételezésével, ahol k a termékenység növekedésének a korstruktúrára gyakorolt hatása szempontjából a halandóság süllyedésével egyenértékű növekedési arányát jelenti.

*Lásd J. Bourgeois-Pichat: Utilisation de la notion de population stable pour mesurer la mortalité et la fécondité des populations des pays sous-développés. Bulletin de l'Institut International de Statistique, 1958. évi 2. sz. 94-121. p. (40).
J. Bourgeois-Pichat: The Concept of a Stable Population, U.N. Population Studies, No. 39, New York, 1968. 237. p. (41).

Amennyiben k értéke nem 0,01, hanem pl. 0,007, ezeket az arányokat a " k " e két értékének az arányával (0,007 : 0,01) való szorzás útján korrigáljuk. A becslések korrekciójához tehát ismernünk kell a halandóság süllyedésének időtartamát ($t_1 - t_0$) és a k értékét. Ez utóbbi - a rendelkezésre álló információktól függően - háromféleképpen számítható ki:

a) az időszak kezdetén és végén megfigyelhető növekedési ráta birtokában:

$$k = 17,8 \frac{r_1 - r_0}{t_1 - t_0} ;$$

b) a születéskor várható átlagos élettartam az időszak elején és végén megfigyelhető nagyságainak birtokában (a szóban forgó ENSZ kiadvány III. 3. táblájának segítségével) a kt értékét számítjuk ki, ahol $t = t_1 - t_0$ és természetesen $kt/t = k$;

c) a kétéves korig való továbbélés valószínűsége (l_2) : (l_0) az időszak elején és végén megfigyelhető értékeinek birtokában a szóban forgó ENSZ kiadvány III. 4. táblájának segítségével szintén kiszámítható a kt , és ebből a k értéke.

A halandóság süllyedésének t -vel jelzett időtartamától függően tehát a szóban forgó ENSZ kiadvány III. 1. táblájába olyan arányokat helyettesíthetünk be, melyek a k értékeinek birtokában oly módon korrigálhatók, hogy a stabil népességi modellel végzett becslések eredményeihez hozzáadva segítenek kiküszöbölni a halandóság süllyedéséből származó pontatlanságokat. Ezek a korrekciós tényezők 3 dologtól függenek:

1. a halandóság süllyedésének időtartamától,
2. a halandóság süllyedésének mértékétől,
3. a halandóság süllyedésének módjától, illetve formájától.

Coale és Demény idézett könyvének III. 1. táblája kizárólag a halandóság süllyedésének a termékenység állandó növekedésével egyenértékű korösszetétel-módosító hatást eredményező módjával, illetve formájával számol. A demográfusok gyakorlati munkájában azonban leggyakrabban a halandóság süllyedésének nem ez a formája, hanem a születéskor várható átlagos élettartam növekedésében, vagy a csecsemőhalandóság csökkenésében kifejeződő formája játszik szerepet. Megvizsgálandó tehát, hogy mi a halandóság süllyedésének Coale és Demény által alkalmazott formája a születéskor várható átlagos élettartam, illetve a csecsemőhalandóság mutatóinak módosulásában kifejezve, s hogy alkalmazhatók-e a Coale és Demény által kidolgozott korrekciós tényezők a halandóság süllyedésének más módjai, illetve formái esetében is, s ha igen, kevesebb hibával járnak-e ebben az esetben.

Abou Gamrah ezt követően a kt értékek olyan táblázatát mutatja be, melyek a Coale és Demény-féle nyugati típusú női halandósági táblatípusok szerinti, születéskor várható átlagos élettartamnak két évenkénti növekedését követik. A kiszámításukra szolgáló formula magától Coale-tól származik:*

* Coale, A. J.: The Growth and Structure of Human Populations. A Mathematical Investigation, Princeton, Princeton University Press, 1972, 228. p. (39).

$$kt = \ln \frac{l_5 \cdot l_{25}}{l_0 \cdot l_{30}} - \ln \frac{l'_5 \cdot l'_{25}}{l'_0 \cdot l'_{30}},$$

ahol l' a halandóság süllyedését követő állapotot, t pedig a süllyedés időtartamát jelzi. A táblából kitűnik, hogy a születéskor várható átlagos élettartam nagysága lineáris változásának nem felel meg a k egy állandó értéke, és fordítva. Ezt követően a szerző egy olyan táblát mutat be, melyben a születéskor várható átlagos élettartam ugyan nő, a csecsemő-halandóság pedig úgy csökken, hogy hatásuk azonos a termékenység évi 1 %-os növekedésének hatásával.

A korrekciós tényezők alkalmazási lehetőségeit Abou Gamrah két szimulációs modellel segítségével vizsgálja, melyeknek mindegyike 35 éves periódusra terjed ki. Az első modell a halandóság süllyedésének Coale és Demény által alkalmazott formáját követi, a másik ettől eltér: a halandóság kezdetben gyorsan süllyedésének üteme lelassul. Mindkét modellt ugyanarra a princetoni szériából származó nyugati halandóságu stabil női népességre alkalmazza, melynek születéskor várható átlagos élettartama 31 év, bruttó reprodukciós együtthatójának értéke 3 gyermek, a nők átlagos életkora gyermekeik megszületésekor 29 év. A szükséges előszámításokat öt éves "előrelépések" formájában bonyolítja le, majd a két népesség demográfiai jellemzőit egybeveti egymással. Kitűnik, hogy a második népesség nyers születési arányszáma, stb. esetében valóban szükség van a további, a szerző által kidolgozott korrekciós tényezők alkalmazására. A halandóság rövidebb időn át tartó csökkenése esetében természetesen a csökkenés formakülönbségei által okozott eltérés is kevésbé jelentős. A halandóság süllyedésének azonban a szerző által vizsgálaton kívül számos egyéb formája is lehet, melyek figyelembevételével további korrekciós tényezők dolgozandók ki.

Ezzel vázlatosan a kvázi-stabil népesség elmélete terén jelentkező újabb fejlődési tendenciákat, problémákat is jeleztük.

Végül, de nem utolsósorban szólnunk kell a stabil népesség modelljének igen nagy népességpolitikai jelentőségéről is. A stabil népesség állandó korösszetételű népességet jelent, az állandó korösszetétel pedig igen sok szempontból előnyösebb, mint az állandóan változó, "hullámzó" korösszetétel. A kérdés az, hogy a számos állandó korösszetétel közül melyik az, melynek elérését a népességpolitikának célul kell kitűznie? Bár a népességi optimum problematikája több évszázados multja ellenére még nincsen megoldva, az optimum-kutatás feladatának egy igen jelentős része - a különböző gazdasági jelenségek (pl. a gazdaságilag aktív népesség aránya, az egy lakosra jutó termelés, fogyasztás és termelési többlet, a munka termelékenység stb.) maximumai, valamint a gazdaságilag inaktív népesség fogyasztása egy gazdaságilag aktív személyre jutó nagyságának minimuma szempontjából legkedvezőbb stabil korösszetételeknek, és a hozzájuk kapcsolódó természetes népmozgalmi jellemzők meghatározása az ún. gazdasági korfák módszertani apparátusának felhasználásával - megoldható (45). E problémát itt azonban csak jelezzük. Behatóbb tárgyalása külön alkalmat kíván.

A stabil népesség elméletének e fejezetben adott vázlatos áttekintése korántsem kimerítő jellegű. Egyes kérdéseket, pl. a népesség stabil állapot felé konvergálásának, és ezzel kapcsolatban az ergodicitásnak és ez utóbbi különböző fajtáinak fogalmát vázlatosan ismertetni sem állt módunkban.* Az e fejezetben előadottak azonban feltehetően elegendőek lesznek ahhoz, hogy ezen értekezés szerzője a következő fejezetekben található kutatása eredményeinek megértését lehetővé tegyék.

*Ez utóbbiról Tekse Kálmán már idézett monográfiája ad jó áttekintést. (3).

II. A STACIONÉR POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK DEMOGRÁFIAI JELLEMZŐI, VALAMINT DEMOGRÁFIAI ÉS GAZDASÁGI JELLEMZŐI KÖZÖTT FENNÁLLÓ KAPCSOLATOK ELSŐ MEGKÖZELÍTÉSE

A zérus növekedési rátájú stabil népesség, vagyis a stacionér népesség és a különféle stacionér alnépességek (szubpopulációk) tulajdonságainak és e tulajdonságok interdependenciájának a stabil növekvő, illetve csökkenő népességekkel kapcsolatban is felvethető hasonló kérdések elemzését megelőző tárgyalása nem csupán didaktikai megfontolásokkal, vagy az egyszerűbbtől a bonyolultabb felé történő haladás lényegében logikai természetű megfontolásával indokolható. Egyet kell értenünk Norman B. Ryder-rel, a stacionér népesség tulajdonságairól szóló egyik legutóbbi publikáció (46) szerzőjével abban, hogy bár a szakemberek és a laikusok figyelmét jelenleg egyaránt a világ népességének az igen gyors ütemű növekedése köti le, nem kétséges, hogy a távolabbi jövő szempontjából megítélve ez a demográfiai egyensúly hiányának csupán átmeneti jellegű problémája. A népesség növekedésének átlagos üteme közelítőleg zérus nagyságrendű volt az emberiség történetének a legkorábbi szakaszaiban is és a stacionér népesség különböző jellemzőinek és az e jellemzők közötti kapcsolatoknak a feltárása a távolabbi jövő szempontjából megítélve sem tekinthető merőben akadémiai jellegű szellemi tornának.

1. A stacionér népesség kialakulásának feltételei és a stacionérá váló népesség száma

A zérus növekedési rátájú stabil népesség, vagyis a stacionér népesség kialakulásának és fennmaradásának a feltételei: 1. a női népesség továbbélési rendjének (továbbélési függvényének és egész halandósági táblájának) az időbeli változatlansága; 2. a leányélveszületések korszecifikus arányszámainak (a termékenységi függvénynek) az időbeli változatlansága; 3. a két előbbi, vagyis a továbbélési és a termékenységi függvény megfelelő értékei szorzatösszegének, vagyis a női népesség nettó reprodukciós együtthatójának 1-gyel való egyenlősége, ami matematikailag diszkrét formában felírva:

$$R_0 = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{L_x}{l_0} \cdot f_x = 1;$$

4. a fiúéveszületések leányéveszületésekhez viszonyított arányának a változatlansága; 5. a férfi népesség továbbélési rendjének (továbbélési függvényének) és egész halandósági táblájának az időbeli változatlansága; 6. a népesség zártsága a vándorlásokkal szemben.

A népesség zártságának a feltételével kapcsolatban megjegyezhető, hogy az helyettesíthető azzal a feltételezéssel is, hogy a különböző korúak és neműek vándorlási egyenlege zérus legyen, a különböző korú és nemű vándorlók termékenysége és halandósága pedig azonos legyen a megfelelő korú nem-vándorlókéval, de elképzelhető stacionér (és egyéb stabil) népesség kialakulása állandó nem zérus vándorlási egyenleg fennforgása esetében is, a vándorlók különböző strukturális jellemzőinek az állandósága esetében, a továbbélési rend és a korszpecifikus termékenységi arányszámok értékeinek az ujrameghatározása alapján. A stacionér jelleg biztosításának természetesen ebben az esetben is feltétele marad a nettó reprodukciós együttható értékének 1-gyel való egyenlősége.

Annak, hogy a stacionér össznépességen belül bizonyos szubpopulációk is stacionérak legyenek az a végső feltétele, hogy e szubpopulációk korszpecifikus arányszámai időbelileg változatlanok legyenek; ez a feltétel viszont csak az adott szubpopulációba történő belépés és belőle való kiválás kor-, illetve tartamspecifikus valószínűségeinek a népességet alkotó születési évjáratok (generációk) közötti azonosulása és időbeli változatlansága következtében alakulhat ki (47, 48).

Amennyiben valamely népesség stacionérrá válásának a feltételei biztosítottak, felmerül, hogy mekkora lesz a stacionérrá váló népesség végső (a továbbiakban változatlan) száma. Ezt legegyszerűbben népességelőreszámítás lebonyolítása útján határozhatjuk meg. Ha ennek során már meghatároztuk a végső női születési kohorsznak a létszámát, a feladat is megoldottnak tekinthető. Az előre számítást azzal a létszámmal célszerű kezdeni, mely a megfelelő termékenységi szint azonnali elérése esetében alakulna ki. Ryder nyomán (46) tételezzük fel, hogy az előreszámítás kezdetén a női népesség továbbélési rendje (l_x) alapján e népesség halandósági táblájában a betöltött éveik száma alapján x -évesek száma L_x , a női népesség termékenységi (anyasági) függvénye pedig $R_0 \cdot f_x$, ahol

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_0} \cdot f_x = 1.$$

Ha ama női születési évjáratok létszámainak a sorozata, melyek a propagatív kor felső határánál kevesebb számú évre terjednek ki B_{t-x} , akkor a L_x és a f_x állandósága esetében kialakuló végső születésszám:

$$B_{\omega} = \left(\frac{\sum_{x=0}^{\omega} B_{t-x} \cdot S_x}{\sum_{x=0}^{\omega} S_x} \right),$$

ahol

$$S_x = \sum_{x=x}^{\infty} L_x \cdot f_x \cdot$$

Amennyiben a népesség az előreszámítás kezdetén stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népesség, a fenti formula az alábbivá egyszerűsödik:

$$B_{\omega} = \frac{B_t \cdot (R_o - 1)}{(R_o \cdot M \cdot r)}$$

ahol R_o a nettó reprodukciós együttható, r a természetes szaporodás intrinsic arányszáma, M pedig az anyák átlagos életkora leánygyermekük megszületésekor (a halandóság hatásának a figyelembevételével számítva). Egyszerűsítsük le például India népességének az előreszámítását annak a feltételezése alapján, hogy ez a népesség stabil népesség, melyben $r = +0,025$, halandósága a Coale-Demény - féle (26) nyugati-típusu halandósági táblák 13. halandósági színvonalával azonos (a nők születéskor várható átlagos élettartama ($e_{o,n}^o$) 50 év, a férfiaké ($e_{o,f}^o$) pedig 47,114 év), az anyák átlagos életkora leánygyermekük megszületésekor (a halandóság hatásának a figyelembevétele nélkül számítva) $m = 29$ év, a fiú élveszületések leány élveszületésekhez viszonyított aránya $k = 1,05$, a jelenlegi népességszám pedig 600 millió fő. Ebben az esetben $B_t = 12,156$ millió, $R_o = 2,019$, $M = 28,672$ és természetesen $r = +0,025$. A fenti formula alapján $B_{\omega} = 8,558$ millió élveszületés. A 600 millió főt kitevő jelenlegi népességszámra csak a B_t , vagyis a kezdeti születésszám meghatározásához van szükségünk. Ha $B_{\omega} = 8,558$ millióval, akkor az implicit népességszám = $B_{\omega} (e_{o,n}^o + k e_{o,f}^o) = 8,558 \text{ millió} \times 99,470 \approx 851 \text{ millió fővel}$. A tényleges népességszámhoz viszonyított növekedés aránya: $851/600 = 1,42$, vagyis 42 %.

A fentiek alapján 8,558 millió leányélveszületésből kiindulva kell tehát meghatároznunk azt a növekedést, melyre az előreszámítás kezdeti időpontja és a termékenység a L_x és f_x értékektől függő pótlási színvonalának az elérése között sor kerül. Ennek becslése során tételezzük fel, hogy $e_{o,n}^o$ 70 évre, $e_{o,f}^o$ 66,023 évre növekszik (21. halandóság színvonal), a többi feltétel pedig változatlan marad. Ha r_t értéke y idő alatt válik egyenlővé zérussal, a születési kohorszok létszámának a növekedését matematikailag folytonos megfogalmazásban az

$$\exp \int_t^{t+y} r(x) dx$$

formula felhasználását számíthatjuk ki. Feltételezhetjük például, hogy r értéke lineárisan csökken $+0,025$ -ről 0 -ra $y = 40$ év alatt. Ebben az esetben $\exp [40 \cdot (0,025 + 0) / 2] = 1,649$. A termékenység csökkenésének szükséges mértéke a bruttó teljes termékenységre vonatkoztatva 62 %-os csökkenést (5,70-ről 2,18-ra süllyedést) jelent. Amennyiben az anyák átlagos életkora leánygyermekük megszületésekor a halandóság hatásának a figyelembevétele nélkül számítva 29-ről 27 évre, ez utóbbi hatással is számítva pedig 28,672 év-ről 26,931 évre süllyed, akkor a születési kohorsz létszáma ebből adódóan $28,672/26,931 =$

= 1,065-szeresére nő, s ha ez a változás is 40 év alatt zajlik le, a végső női születési kohorsz létszáma $8,558 \cdot 1,649 \cdot 1,065 = 15,029$ millió élveszületés, a végső (stacionér) népességszám pedig $15,029$ millió $(e_{o,n}^0 + k e_{o,f}^0) = 15,029$ millió $\cdot 139,324 = 2,094$ milliárd fő, ami India számára nem lenne kedvező (igen nagyarányu növekedést jelentene).

Ryder-nak a fentiekben bemutatott számítási eljárása természetesen csupán egyike ama eljárásoknak, melyek segítségével a stacionérrá váló népesség végső létszáma meghatározható. Kétségtelen, hogy valamely népesség stacionérrá válását minden esetben befolyásolja eddigi fejlődése során kialakult létszáma és befolyásolják a stacionérrá válás kezdetén megfigyelhető természetes népmozgalmi és vándormozgalmi jellemzői is. Csupán elméleti meggondolások alapján azonban a stacionérrá váló népességnek a létszáma tetszőleges lehet. Ez a létszám lehet a már elértnél nagyobb is, de ennél kisebb is lehet, sőt lehet a népesség eddigi fejlődése során kialakult létszám is; a népesség azon előreszámításának ugyanis, melynek eredményeként a népesség stacionérrá válását elképzeljük, számos változata dolgozható ki, a nettó reprodukciós együtthatónak (R_0) a népesség stacionérrá válását és stacionér állapotban maradását eredményező egységnyi értékét, pontosabban: az eme egységnyi értéket eredményező korszecifikus népmozgalmi jellemzőit ugyanis az előreszámítás különböző szakaszaiban kezdhethetjük el szerepeltetni. A "jelenlennel" történő egybevetés szempontjából igen nagy analitikai értéke van például ama stacionér népesség kiszámításának, illetve feltételezésének, melyben az élveszületések évi száma azonos a "jelenlegivel", korszecifikus halandósága pedig szintén a "jelenlegi" állapotoknak felel meg. E népességnek természetesen a "jelenlegitől" különbözőek lesznek a korszecifikus termékenységi jellemzői és a "jelenlegitől" különböző lesz a létszáma és korösszetétele is. A halálozások évi száma azonosul benne az élveszületések a "jelenlegivel" azonos évi számával, létszáma attól függően lesz a már elértnél kisebb vagy nagyobb, hogy az élveszületések "jelenlegi" évi számának és a jelenlegi halandósági táblája szerinti születéskor várható átlagos élettartam-értéknek a szorzata kisebb-e vagy nagyobb-e a népesség "jelenlegi" létszámánál stb.

Hasonló meggondolások alapján képzelhető el a különféle szubpopulációk stacionérrá válása, illetve: a stacionérrá váló szubpopulációk végső számának a kialakulása is.

Vizsgáljuk meg, milyen összefüggések vannak valamely stacionér népességben a stacionér össznépesség és a stacionér alnépességek különféle demográfiai jellemzői között?

2. A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzőinek az un. gazdasági halandósági táblák alapján megállapítható főbb összefüggései

A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak az elemzése azon a realisztikusnak tűnő feltételezésen alapszik, hogy a gazdasági eseményeket, hasonlóan a népmozgalmi eseményekhez, a népesség produkálja. Valóban nem nehéz belátni, hogy a népesség, a lakosok azok, akik gazdaságilag aktívak, vagy gazdaságilag inaktívak, akik idejüket munkaidőként vagy nem munkaidőként (szabadidőként) töltik el, akik

termelnek, fogyasztanak, megtakarítanak stb. Kétségtelen tehát, hogy a gazdasági aktivitás és a gazdasági inaktivitás, a munkaidő és a nem-munkaidő (szabad idő), a termelés és a fogyasztás, a megtakarítás jelenségeinek, és számos más gazdasági jelenségnek az alakulása függ - többek között - a népesség számának és különböző ismérvek szerinti összetételének az alakulásától is. A stacionér népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak a vizsgálatát ezért a stacionér populációk és szubpopulációk demográfiai jellemzői közötti kapcsolatok elemzésének az analógiájára, az ez utóbbi során alkalmazott elemzési elvek és módszerek, valamint szerkezeti felépítés alapul vételével fogjuk elvégezni.

A stacionér népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak az elméleti vizsgálatát legkönnyebben szintén a vonatkozó jelenségek táblái, adott esetben az un. gazdasági halandósági táblák (4, 6, 8, 9, 11, 29) mutatói közötti kapcsolatok elemzéséből kiindulva végezhetjük el. Köztudott, hogy a gazdasági halandósági táblák kiszámításának egyik fontos mozzanata a gazdasági jelenségek un. stacionér korfáinak a kiszámítása az általános halandósági táblák x -éves koru stacionér népessége, ill. a táblabeli stacionér népesség x -évesen leélt összes éveinek a számára vonatkozó adatoknak (L_x) a gazdasági jelenségek (a gazdasági aktivitás és inaktivitás, a munkaidő és nem-munkaidő (szabadidő), a termelés és a fogyasztás stb.) korszpecifikus intenzitásaival, ill. nagyságaival való megszorozása útján. Eredményül az x -éves koru gazdaságilag aktív stacionér népességet, ill. az x -évesen és gazdaságilag aktív állapotban leélt évek számát ($L_{g,x}$), az x -éves koru gazdaságilag inaktív stacionér népességet, ill. az x -évesen és gazdaságilag inaktív állapotban leélt évek számát ($L_{i,x}$) a munkaidőt jelképező, x -éves koru un. mindig dolgozó stacionér népességet, ill. az x -éves koru stacionér népesség munkaidejét ($L_{m,x}$), a nem-munkaidőt (szabadidőt) jelképező, x -éves koru, un. sosem dolgozó stacionér népességet, ill. az x -éves koru stacionér népesség nem-munkaidejét ($L_{sz,x}$), az x -éves koru stacionér népesség, pontosabban: az x -éves koru gazdaságilag aktív stacionér népesség termelését ($L_{t,x}$), az x -éves koru stacionér népesség fogyasztását ($L_{f,x}$), és termelési többletét ($L_{t/+ ,x}$), ill. fogyasztási többletét ($L_{f/- ,x}$) kapjuk. Könnyen belátható, hogy:

$$L_x = L_{g,x} + L_{i,x} = L_{m,x} + L_{sz,x} ;$$

$$L_{g,x} = L_x - L_{i,x} ;$$

$$L_{i,x} = L_x - L_{g,x} ;$$

$$L_{m,x} = L_x - L_{sz,x} ;$$

$$L_{sz,x} = L_x - L_{m,x} ;$$

$$L_{t,x} = L_{t/+ ,x} + L_{f,x} ;$$

$$L_{f,x} = L_{f/- ,x} + L_{t,x} ;$$

$$L_{t/+ , x} = L_{t, x} - L_{f, x} ;$$

$$L_{f/- , x} = L_{f, x} - L_{t, x} \text{ stb.}$$

Ha mármost a halandósági táblák stacionér népessége gazdasági korfáinak adatait alulról kumuláljuk, az x -éves korban várható összes gazdaságilag aktív ($T_{g, x}$), és az összes gazdaságilag inaktív élettartam ($T_{i, x}$), összes munkaidő ($T_{m, x}$), összes nem-munkaidő (szabadidő) ($T_{sz, x}$), összes termelés ($T_{t, x}$), összes fogyasztás ($T_{f, x}$), összes termelési ($T_{t/+ , x}$) és az összes fogyasztási többlet ($T_{f/- , x}$) értékeit kapjuk meg, melyeknek a tábla továbbélési rendje (l_x) megfelelő értékeivel történő elosztása a gazdasági jellemzők x -éves korban várható átlagos nagyságát eredményezi. A halandósági táblák stacionér népessége szóban forgó gazdasági jellemzői teljes volumenének, ill. születéskor várható teljes nagyságának ($T_{g, o}$; $T_{i, o}$; $T_{m, o}$; $T_{sz, o}$; $T_{t, o}$; $T_{f, o}$; $T_{t/+ , o}$; $T_{f/- , o}$) a halandósági tábla gyökével (l_o) történő elosztása a gazdasági jellemzők születéskor várható átlagos nagyságainak az alakulását eredményezi. Ez utóbbi adatok természetesen úgy is kiszámíthatók, hogy a stacionér gazdasági korfáknak az egyes korcsoportokra vonatkozó értékeit sorra elosztjuk l_o -val, vagyis a halandósági tábla gyökével ($L_{g, x} : l_o$; $L_{i, x} : l_o$; $L_{m, x} : l_o$; $L_{sz, x} : l_o$; $L_{t, x} : l_o$; $L_{f, x} : l_o$; $L_{t/+ , x} : l_o$; $L_{f/- , x} : l_o$), és a kapott eredményeket összegezzük. A gazdasági halandósági táblák említett mutatóiból számos további mutató képezhető, pl. az átlagos élettartam különböző (munkaidőben, termelt értékben, fogyasztott értékben, a termelési, ill. fogyasztási többlet értékében stb. kifejezett) árainak a mutatói, melyeket a vonatkozó gazdasági jelenségek x -éves korban várható átlagos nagyságainak az x -éves korban várható átlagos élettartam megfelelő értékeivel történő elosztása útján képezünk ($e_{m, x}^o : e_x^o$; $e_{t, x}^o : e_x^o$; $e_{f, x}^o : e_x^o$; $e_{t/+ , x}^o : e_x^o$; $e_{f/- , x}^o : e_x^o$), a stacionér népesség munkája termelékenysége és fogyasztása hatékonyságának a mutatói, melyeket az x -éves korban várható átlagos termelés értékének az x -éves korban várható átlagos munkaidővel, ill. az x -éves korban várható átlagos fogyasztás értékének az x -éves korban várható átlagos nem-munkaidővel (szabadidővel) történő elosztása útján alakíthatunk ki ($e_{t, x}^o : e_{m, x}^o$, ill. $e_{f, x}^o : e_{sz, x}^o$), és érdekes összefüggéseket tár fel a mutatók reciprokainak a kiszámítása is.

Könnyen belátható, hogy az élettartam egészére vonatkoztatott munkatermelékenység mutatója az élettartam egy éve termelt értékben kifejezett ára és munkaidőben kifejezett ára hányadosaként, az élettartam egészére vonatkoztatott munkatermelékenység reciprokaként pedig ez utóbbi reciprokaként is felfogható:

$$\frac{e_{t, o}^o}{e_{m, o}^o} = \frac{T_{t, o}}{l_o} = \frac{T_{t, o}}{T_{m, o}} = \frac{e_{t, o}^o \cdot l_o}{e_{m, o}^o \cdot l_o} = \frac{e_{t, o}^o \cdot e_o^o}{e_{m, o}^o \cdot e_o^o} = \frac{\frac{e_{t, o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{m, o}^o}{e_o^o}} \text{ és}$$

$$\frac{e_{m,o}^o}{e_{t,o}^o} = \frac{\frac{T_{m,o}}{l_o}}{\frac{T_{t,o}}{l_o}} = \frac{T_{m,o}}{T_{t,o}} = \frac{e_{m,o}^o \cdot l_o}{e_{t,o}^o \cdot l_o} = \frac{e_{m,o}^o \cdot e_o^o}{e_{t,o}^o \cdot e_o^o} = \frac{\frac{e_{m,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{t,o}^o}{e_o^o}} .$$

Az élettartam egészére vonatkoztatott fogyasztás-hatékonyság mutatója ugyanakkor az élettartam egy éve fogyasztott értékben kifejezett ára és nem-munkaidőben (szabadidőben) kifejezett ára hányadosaként, az élettartam egészére vonatkoztatott fogyasztás-hatékonyság reciproka pedig ez utóbbi reciprokaként is definiálható:

$$\frac{e_{f,o}^o}{e_{sz,o}^o} = \frac{\frac{T_{f,o}}{l_o}}{\frac{T_{sz,o}}{l_o}} = \frac{T_{f,o}}{T_{sz,o}} = \frac{e_{f,o}^o \cdot l_o}{e_{sz,o}^o \cdot l_o} = \frac{e_{f,o}^o \cdot e_o^o}{e_{sz,o}^o \cdot e_o^o} = \frac{\frac{e_{f,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{sz,o}^o}{e_o^o}} \text{ és}$$

$$\frac{e_{sz,o}^o}{e_{f,o}^o} = \frac{\frac{T_{sz,o}}{l_o}}{\frac{T_{f,o}}{l_o}} = \frac{T_{sz,o}}{T_{f,o}} = \frac{e_{sz,o}^o \cdot l_o}{e_{f,o}^o \cdot l_o} = \frac{e_{sz,o}^o \cdot e_o^o}{e_{f,o}^o \cdot e_o^o} = \frac{\frac{e_{sz,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{f,o}^o}{e_o^o}} .$$

Az élettartam egésze egy évének munkaidőben kifejezett ára ugyanakkor termelt értékben kifejezett ára és az élettartam egészére vonatkoztatott munkatermelékenység hányadosaként is felfogható:

$$\frac{\frac{e_{t,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{m,o}^o}{e_o^o}} = \frac{\frac{e_{t,o}^o \cdot e_o^o}{e_{t,o}^o \cdot e_o^o} \cdot \frac{e_{m,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{m,o}^o \cdot e_o^o}{e_{t,o}^o \cdot e_o^o}} = \frac{e_{m,o}^o}{e_o^o} = \frac{\frac{T_{m,o}}{l_o}}{\frac{T_o}{l_o}} = \frac{T_{m,o}}{T_o} ,$$

ezen ár reciproka pedig a termelt értékben kifejezett ár reciproka és a munkatermelékenység reciproka hányadosaként is értelmezhető:

$$\frac{\frac{e_o^o}{e_{t,o}^o}}{\frac{e_o^o}{e_{m,o}^o}} = \frac{\frac{e_o^o \cdot e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o \cdot e_{t,o}^o} \cdot \frac{e_{t,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{m,o}^o \cdot e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o \cdot e_{t,o}^o}} = \frac{e_o^o}{e_{m,o}^o} = \frac{\frac{T_o}{l_o}}{\frac{T_{m,o}}{l_o}} = \frac{T_o}{T_{m,o}} .$$

Az élettartam egésze egy évének a termelt értékben kifejezett ára munkaidőben kifejezett ára és a munkatermelékenység reciprokának a hányadosaként is definiálható:

$$\frac{\frac{e_{m,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{m,o}^o}{e_{t,o}^o}} = \frac{e_{m,o}^o \cdot e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o \cdot e_o^o} = \frac{e_{t,o}^o}{e_o^o} = \frac{\frac{T_{t,o}}{l_o}}{\frac{T_o}{l_o}} = \frac{T_{t,o}}{T_o},$$

ezen ár reciproka pedig munkaidőben kifejezett ára reciproka és a munkatermelékenység hányadosaként is felfogható:

$$\frac{\frac{e_o^o}{e_{m,o}^o}}{\frac{e_o^o}{e_{t,o}^o}} = \frac{e_o^o \cdot e_{m,o}^o}{e_{t,o}^o \cdot e_{m,o}^o} = \frac{e_o^o}{e_{t,o}^o} = \frac{\frac{T_o}{l_o}}{\frac{T_{t,o}}{l_o}} = \frac{T_o}{T_{t,o}}.$$

Az élettartam egésze egy évének fogyasztott értékben kifejezett ára az élettartam egészére vonatkoztatott fogyasztás-hatékonyság, valamint az élettartam alatti nem-munkaidő (szabadidő) egy évére jutó összélettartam hányadosaként is értelmezhető:

$$\frac{\frac{e_{f,o}^o}{e_{sz,o}^o}}{\frac{e_o^o}{e_{sz,o}^o}} = \frac{e_{f,o}^o \cdot e_{sz,o}^o}{e_o^o \cdot e_{sz,o}^o} = \frac{e_{f,o}^o}{e_o^o} = \frac{\frac{T_{f,o}}{l_o}}{\frac{T_o}{l_o}} = \frac{T_{f,o}}{T_o},$$

ezen ár reciproka pedig a fogyasztás-hatékonyság reciproka és az élettartam egy évére jutó nem-munkaidő (szabadidő) hányadosaként is definiálható:

$$\frac{\frac{e_{sz,o}^o}{e_{f,o}^o}}{\frac{e_{sz,o}^o}{e_o^o}} = \frac{e_{sz,o}^o \cdot e_o^o}{e_{sz,o}^o \cdot e_{f,o}^o} = \frac{e_o^o}{e_{f,o}^o} = \frac{\frac{T_o}{l_o}}{\frac{T_{f,o}}{l_o}} = \frac{T_o}{T_{f,o}}.$$

Az élettartam egy éve a termelési többlet értékében kifejezett ára a fentiekből adódóan:

$$\frac{\frac{e_{m,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{m,o}^o}{e_{t,o}^o}} - \frac{\frac{e_{f,o}^o}{e_{sz,o}^o}}{\frac{e_{f,o}^o}{e_o^o}} = \frac{e_{t,o}^o}{e_o^o} - \frac{e_{f,o}^o}{e_o^o} = \frac{e_{t,o}^o - e_{f,o}^o}{e_o^o} = \frac{e_{t/+/,o}^o}{e_o^o} =$$

$$= \frac{\frac{T_{t/+/,o}}{l_o}}{\frac{T_o}{l_o}} = \frac{T_{t/+/,o}}{T_o}.$$

Az élettartam egy évének különböző árai és reciprokaik, valamint a munkatermelékenység, a fogyasztás-hatékonyság és reciprokaik közötti kapcsolatok bemutatására itt csak mellékesen térünk ki; e téma az itt előadottakkal korántsem tekinthető lezártnak.

3. A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzőinek az élveszületések, illetve a halálozások tetszőleges évi számának az alapulvételével becsült stacionér népességekben kimutatható főbb összefüggései

A stacionér népességi és gazdasági korfák kiszámítása szintén nem korlátozódhatik csupán a halandósági táblák stacionér népességének és e stacionér népesség gazdasági korfáinak a kiszámítására. Ez utóbbiak ti. szintén egy mesterségesen leegyszerűsített születésszámból (gyökből) kiindulva épülnek fel (az l_o értéke legtöbbször 100 000-et tesz ki), mely rendszerint nemcsak azokról a rendszerint évről-évre változó születésszámokról tér el, melyeknek a népesség és gazdasági jelenségek tényleges korfáinak a kialakításában a valóságban szerepük volt, hanem annak az időszaknak (pl. annak az évnek, kétévnek stb.) a tényleges születésszámától is, melynek az adatai alapján a halandósági táblák stacionér népességére és e népesség gazdasági korfáira vonatkozó becsléseinket végezzük. A halandósági táblák stacionér népességének és a stacionér népesség gazdasági korfáinak az adatai tehát a tényleges népességi és gazdasági korfákkal egybevethető és egybevetendő stacionér korfáknak az abszolút nagyságait nem fejezik ki, bár alakjukat, belső arányukat helyesen, vagyis ugyanugy írják le, mint bármely egyéb születésszám (gyök) alapján kiszámított stacionér népességi és gazdasági korfák. A stacionér korfáknak a tényleges korfákkal való gyakorlati egybevetethetősége biztosítása céljából tehát meg kell vizsgálnunk a halandósági táblákétól különböző stacionér népességi és gazdasági korfák kialakításának az elméleti alapjait és technikáját, vagyis a stacionér népesség, a gazdasági szempontból is stacionér népesség, valamint a stacionér gazdasági korfák elméletét és kimunkálásának technikáját általában is.

Stacionér népességen - mint több ízben is jeleztük - általában olyan népesség értendő, melyben a születések és a halálozások évi száma azonos, és azonos az emiatt változatlan számú össznépességhez viszonyított arányuk is, mely a születéskor várható átlagos élettartam inverzeként is felfogható. Az ilyen népességben változatlan az egyes korévek, ill. korcsoportok népességének a száma, s így a korösszetétel is, mely utóbbi kizárólag az elhalálozás, ill. a továbbélés korszpecifikus valószínűségeitől függ. A halandósági táblák stacionér népessége - mint jeleztük - a stacionér népességnek csak egyik, méghozzá a legegyszerűbb, pontosabban: mesterségesen leegyszerűsített esete, melynek összlétszáma

(T_o) - mint ismeretes - a tábla gyökének (l_o) , ill. a halálozások táblabeli számának:

$\sum_{x=0}^{\omega} d_x$ és a születéskor várható átlagos élettartamnak (e_o^o) a szorzataként is definiálható:

$$T_o = l_o \cdot e_o^o = e_o^o \cdot \sum_{x=0}^{\omega} d_x .$$

Ugyanígy bármely tetszőleges B születésszámu, illetve D halálozási számu stacionér népesség száma .

A halandósági tábla gazdasági szempontból specifikus stacionér népességeinek a száma és a népesség gazdasági jellemzőinek (teljesítményeinek) az összessége szintén definiálható a táblabeli stacionér népesség születési, ill. halálozási számának (a tábla gyökének) és a vonatkozó gazdasági jelenségek születéskor várható átlagos volumeneinek a szorzataként, vagyis:

$$T_{g,o} = l_o \cdot e_{g,o}^o = e_{g,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x ,$$

$$T_{i,o} = l_o \cdot e_{i,o}^o = e_{i,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x ,$$

$$T_{m,o} = l_o \cdot e_{m,o}^o = e_{m,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x ,$$

$$T_{sz,o} = l_o \cdot e_{sz,o}^o = e_{sz,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x ,$$

$$T_{t,o} = l_o \cdot e_{t,o}^o = e_{t,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x ,$$

$$T_{f,o} = l_o \cdot e_{f,o}^o = e_{f,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x ,$$

$$T_{t/+/,o} = l_o \cdot e_{t,/+/,o}^o = e_{t,/+/,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x , \text{ ill.}$$

$$T_{f/-/,o} = l_o \cdot e_{f,-/-,o}^o = e_{f,-/-,o}^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x .$$

Hasonló módon bármely tetszőleges B születésszámu, illetve D halálozási számu stacionér népesség esetében:

$$P = B \cdot e_o^o = D \cdot e_o^o ,$$

$$P_g = B \cdot e_{g,o}^o = D \cdot e_{g,o}^o ,$$

$$P_i = B \cdot e_{i,o}^o = D \cdot e_{i,o}^o ,$$

$$P_m = B \cdot e_{m,o}^o = D \cdot e_{m,o}^o ,$$

$$P_{sz} = B \cdot e_{sz,o}^o = D \cdot e_{sz,o}^o ,$$

$$P_t = B \cdot e_{t,o}^o = D \cdot e_{t,o}^o ,$$

$$P_f = B \cdot e_{f,o}^o = D \cdot e_{f,o}^o ,$$

$$P_{t/+} = B \cdot e_{t/+,o}^o = D \cdot e_{t/+,o}^o , \text{ illetve}$$

$$P_{f/-} = B \cdot e_{f/-,o}^o = D \cdot e_{f/-,o}^o .$$

Hogyan interpretálhatók ezek a formulák? E formulákból kitűnik, hogy az élveszületések valamely tetszőleges B számán, ill. a halálozások ez utóbbival azonos D számán alapuló stacionér népesség által produkált gazdasági jelenségek összmenntységei a B születésszámtól, illetve D halálozási számtól és a gazdasági jelenségek születéskor várható átlagos nagyságaitól függenek, mely utóbbiak azonosak a gazdasági halandósági táblák megfelelő mutatóinak az értékeivel. Azonkívül azonban, hogy a vonatkozó számítások elvégzését szolgáló utasításokat jelentenek, e formulák a népesedési és gazdasági jellemzői szempontjából egyaránt stacionér népesség egy-egy érdekes, szóbelileg is megfogalmazható sajátosságát is feltárják.

$$P = B \cdot e_o^o = D \cdot e_o^o ,$$

vagyis bármely stacionér népesség létszámát megkapjuk, ha a születések, illetve a halálozások évi számát megszorozzuk a születéskor várható átlagos élettartammal, más szavakkal: bármely stacionér népességben a születéskor várható átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, amennyi a népesség mindenkori összlétszáma, továbbá:

$$P_g = B \cdot e_{g,o}^o = D \cdot e_{g,o}^o ,$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a gazdaságilag aktív népesség kor-specifikus arányszámai is változatlanok - a gazdaságilag aktív stacionér népesség száma az elveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születéskor várható átlagos gazdasági-lag aktív élettartamnak a szorzataként is definiálható, más szavakkal: az ilyen stacionér né-pességben a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, amekkora a gazdaságilag aktív stacionér né-pesség mindenkori összlétszáma, továbbá:

$$P_i = B \cdot e_{i,o}^o = D \cdot e_{i,o}^o,$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a gazdaságilag inaktív népesség kor-specifikus arányszámai is változatlanok - a gazdaságilag inaktív stacionér népesség száma az elveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születéskor várható átlagos gazda-ságilag inaktív élettartamnak a szorzataként is definiálható; más szavakkal: az ilyen stacio-nér népességben a születéskor várható átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, amekkora a gazdaságilag inaktív stacio-nér össznépesség mindenkori összlétszáma; továbbá:

$$P_m = B \cdot e_{m,o}^o = D \cdot e_{m,o}^o,$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a munkaidő korszpecifikus nagyságai is változatlanok, az években mért évi munkaidőalap, illetve az un. "állandóan dolgozó sta-cionér népesség" száma az elveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születés-kor várható átlagos munkaidőnek a szorzataként is definiálható, más szavakkal: az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt any-nyian születnek és annyian halnak meg, ahány embernek e népességben az egész életét munkaidővé kellene változtatnia ahhoz (ez lenne az "állandóan dolgozó stacionér népesség"), hogy e népesség összes munkaidejét, termelését stb. biztosítsa anélkül, hogy a többi lakos ebben résztvenne; továbbá:

$$P_{sz} = B \cdot e_{sz,o}^o = D \cdot e_{sz,o}^o,$$

igy bármely olyan stacionér népességben, melyben a nem-munkaidő (szabadidő) korszpecifi-kus nagyságai is változatlanok, az években mért nem-munkaidő-alap (szabadidő-alap), illet-ve az un. "sosem dolgozó stacionér népesség" száma, az elveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születéskor várható átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) a szorzata-ként is definiálható; más szavakkal: az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos nem-munkaidőnek megfelelő idő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahány embernek a népességben az egész életét nem-munkaidőként (szabadidőként) kellene leélnie ahhoz (s ez lenne a "sosem dolgozó stacionér népesség"), hogy a népesség összes nem-munkaidejét (szabadidejét) biztosítsa anélkül, hogy a többi lakos ebben részt venne,

ill. ahány ember munka nélkül élhetne, ha - ceteris paribus - a többi ember állandóan dolgozna^{*}. Továbbá:

$$P_t = B \cdot e_{t,o}^o = D \cdot e_{t,o}^o,$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a termelés korszpecifikus nagyságai is változatlanok, az évi termelés volumene az élveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születéskor várható termelés átlagos nagyságának a szorzataként is definiálható. Az ilyen stacionér népességben időben változatlan az évi termelés abszolút és az egy lakosra jutó nagysága is. Minthogy az évi termelés volumene az egy lakosra jutó évi termelés és a népességszám szorzataként is definiálható,

$$\begin{aligned} P_t &= B \cdot e_{t,o}^o = D \cdot e_{t,o}^o = P \frac{P_t}{P} = \\ &= B \cdot e_o^o \frac{P_t}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_t}{P} = P \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_o^o} = \\ &= P \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_o^o} = P \frac{e_{t,o}^o}{e_o^o}. \end{aligned}$$

Az olyan stacionér népességben, melyben a gazdasági aktivitás és a munkaidő korszpecifikus nagyságai is változatlanok - változatlan az egy gazdaságilag aktív személyre és az egy un. "mindig dolgozó személyre" jutó évi termelés volumene is. S minthogy az évi termelés összmenyisége az egy gazdaságilag aktív személyre jutó évi termelés és a gazdaságilag aktív népesség számának, valamint az egy un. "mindig dolgozó személyre" jutó évi termelés és az un. "mindig dolgozó népesség" számának a szorzataként is definiálható, belátható, hogy

$$\begin{aligned} P_t &= B \cdot e_{t,o}^o = D \cdot e_{t,o}^o = P_g \frac{P_t}{P_g} = \\ &= B \cdot e_{g,o}^o \frac{P_t}{P_g} = D \cdot e_{g,o}^o \frac{P_t}{P_g} = P_g \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_{g,o}^o} = \\ &= P_g \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} = P_g \frac{e_{t,o}^o}{e_{g,o}^o} \text{ és} \end{aligned}$$

^{*}Mindez vonatkozik a nem gazdasági szempontból specifikus stacionér alnépességekre is. Pl. a születéskor várható un. iskolai élettartamnak megfelelő idő alatti születések, ill. halálozások száma a stacionér iskolai népesség számával, a születéskor várható un. házas élettartam alattiaké a stacionér házas népesség számával stb. lenne egyenlő.

$$\begin{aligned}
P_t &= B \cdot e_{t,o}^o = D \cdot e_{t,o}^o = P_m \frac{P_t}{P_m} = \\
&= B \cdot e_{m,o}^o \frac{P_t}{P_m} = D \cdot e_{m,o}^o \frac{P_t}{P_m} = P_m \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_{m,o}^o} = \\
&= P_m \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_{o,o}^o} = P_m \frac{e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o} .
\end{aligned}$$

A fentiekből következik, hogy:

$$\frac{P_t}{P} = \frac{e_{t,o}^o}{e_o^o} ; \quad \frac{P_t}{P_g} = \frac{e_{t,o}^o}{e_{g,o}^o} \quad \text{és} \quad \frac{P_t}{P_m} = \frac{e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o} , \quad \text{vagyis}$$

$$\frac{\frac{P_t}{P}}{\frac{P_t}{P_g}} = \frac{\frac{e_{t,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{t,o}^o}{e_{g,o}^o}} = \frac{P_g}{P} = \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_o^o} = \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_o^o} = \frac{e_{g,o}^o}{e_o^o} , \quad \text{továbbá:}$$

$$\frac{\frac{P_t}{P_g}}{\frac{P_t}{P_m}} = \frac{\frac{e_{t,o}^o}{e_{g,o}^o}}{\frac{e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o}} = \frac{P_m}{P_g} = \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} = \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} = \frac{e_{m,o}^o}{e_{g,o}^o} , \quad \text{végül}$$

$$\frac{\frac{P_t}{P}}{\frac{P_t}{P_m}} = \frac{\frac{e_{t,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o}} = \frac{P_m}{P} = \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_o^o} = \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_o^o} = \frac{e_{m,o}^o}{e_o^o} .$$

Megállapítható tehát, hogy egy olyan stacionér népességben, melyben a gazdasági aktivitás, a munkaidő és a termelés korspecifikus intenzitásai, ill. nagyságai is változatlanok:

- az egy lakosra jutó évi termelés olyan arányban tér el az egy gazdaságilag aktív személyre jutó évi termeléstől, mint a gazdaságilag aktív személyek száma a népességszámtól, ill. mint a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam a születés-

kor várható átlagos összélettartamtól, és mint a születéskor várható gazdaságilag aktív élettartam alatti születések, ill. halálozások száma a születéskor várható összélettartam alattiakétól stb.; továbbá

- az egy gazdaságilag aktív személyre jutó évi termelés olyan arányban tér el az egy un. "állandóan dolgozó személyre" jutótól, mint az un. "állandóan dolgozók" száma a gazdaságilag aktív népesség számától, ill. mint a születéskor várható átlagos munkaidő a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartamtól, és mint a születéskor várható átlagos munkaidő alatti születések, ill. halálozások száma a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam alattiakétól stb.; végül

- az egy lakosra jutó évi termelés olyan arányban tér el az egy "állandóan dolgozó személyre" jutótól, mint az un. "állandóan dolgozók" száma a népességszámtól, ill. mint a születéskor várható átlagos munkaidő a születéskor várható átlagos összélettartamtól, és mint a születéskor várható átlagos munkaidő alatti születések, ill. halálozások száma a születéskor várható összélettartam alattiakétól stb.

Olyan stacionér népességben tehát, melyben a gazdasági aktivitás, a munkaidő és a termelés korszpecifikus intenzitásai, ill. nagyságai is változatlanok:

- a születéskor várható átlagos összélettartam alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy lakosra jutó termelés időben változatlan évi volumene mellett biztosítják a népesség évi össztermelését;

- a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy gazdaságilag aktív személyre jutó termelés időben változatlan évi volumene mellett biztosítják a népesség évi össztermelését;

- a születéskor várható átlagos munkaidő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy un. "állandóan dolgozó személyre" jutó termelés időben változatlan évi volumene mellett biztosítják a népesség évi össztermelését. Továbbá:

$$P_f = B \cdot e_{f,o}^o = D \cdot e_f^o.$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a fogyasztás korszpecifikus nagyságai is változatlanok, az évi fogyasztási volumen az élveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születéskor várható fogyasztás átlagos nagyságának a szorzataként is definiálható. Minthogy az ilyen stacionér népességben időben változatlan az évi fogyasztás és az össznépesség egy lakosára jutó évi fogyasztásnak a nagysága is, az évi összfogyasztás pedig az egy lakosra jutó évi fogyasztás és a népességszám szorzataként is definiálható:

$$\begin{aligned} P_f &= B \cdot e_{f,o}^o = D \cdot e_f^o = P \frac{P_f}{P} = B \cdot e_o^o \frac{P_f}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_f}{P} = \\ &= P \frac{B \cdot e_{f,o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_f^o}{D \cdot e_o^o} = P \frac{d_{f,o}^o}{e_o^o}. \end{aligned}$$

Az ilyen stacionér népességben tehát a születéskor várható átlagos összélettartam alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy lakosra jutó fogyasztás időben változatlan évi nagysága mellett biztosítják a népesség évi összfogyasztását. Továbbá:

$$P_{t/x/} = B \cdot e_{t/+/o}^o = D \cdot e_{t/+/o}^o,$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a termelési többlet korszpecifikus nagyságai is változatlanok, az évi termelési többlet az élveszületések, ill. a halálozások évi számának és a születéskor várható termelési többlet átlagos nagyságainak a szorzataként is definiálható. Minthogy az ilyen stacionér népességben időben változatlan az évi termelési többlet abszolút nagysága és egy lakosra jutó nagysága, az évi termelési többlet volumene pedig az egy lakosra jutó évi termelési többlet és a népességszám szorzataként is definiálható,

$$\begin{aligned} P_{t/+} &= B \cdot e_{t/+/o}^o = D \cdot e_{t/+/o}^o = P \frac{P_{t/+}}{P} = B \cdot e_o^o \frac{P_{t/+}}{P} = \\ &= D \cdot e_o^o \frac{P_{t/+}}{P} = P \frac{B \cdot e_{t/+/o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{t/+/o}^o}{D \cdot e_o^o} = P \frac{e_{t/+/o}^o}{e_o^o}. \end{aligned}$$

Az olyan stacionér népességben, melyben a gazdasági aktivitás és a munkaidő korszpecifikus nagyságai is változatlanok - változatlan az egy gazdaságilag aktív személyre és az egy un. "mindig dolgozó személyre" jutó termelési többlet évi mennyisége is; s minthogy a termelési többlet évi összmenyisége az egy gazdaságilag aktív személyre jutó termelési többlet évi mennyisége, a gazdaságilag aktív népesség számának, valamint az egy un. "mindig dolgozó személyre" jutó termelési többlet évi mennyisége és az un. "mindig dolgozó népesség" számának a szorzataként is definiálható - belátható, hogy

$$P_{t/+} = B \cdot e_{t/+/o}^o = D \cdot e_{t/+/o}^o = P_g \frac{P_{t/+}}{P_g} = B \cdot e_{g,o}^o.$$

$$\begin{aligned} \frac{P_{t/+}}{P_g} &= D \cdot e_{g,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_g} = P_g \frac{B \cdot e_{t/+/o}^o}{B \cdot e_{g,o}^o} = P_g \frac{D \cdot e_{t/+/o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} = \\ &= P_g \frac{e_{t/+/o}^o}{e_{g,o}^o} \text{ és} \end{aligned}$$

$$P_{t/+} = B \cdot e_{t/+/o}^o = D \cdot e_{t/+/o}^o = P_m \frac{P_{t/+}}{P_m} = B \cdot e_{m,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_m} =$$

$$= D \cdot e_{m,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_m} = P_m \frac{B \cdot e_{t/+,o}^o}{B \cdot e_{m,o}^o} = P_m \frac{D \cdot e_{t/+,o}^o}{D \cdot e_{m,o}^o} = P_m \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{m,o}^o}.$$

A fentiekből következik, hogy

$$\frac{P_{t/+}}{P} = \frac{e_{t/+,o}^o}{e_o^o}; \quad \frac{P_{t/+}}{P_g} = \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{g,o}^o} \quad \text{és} \quad \frac{P_{t/+}}{P_m} = \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{m,o}^o},$$

vagyis

$$\frac{\frac{P_{t/+}}{P}}{\frac{P_{t/+}}{P_g}} = \frac{\frac{e_{t/+,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{t/+,o}^o}{e_{g,o}^o}} = \frac{P_g}{P} = \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_o^o} = \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_o^o} = \frac{e_{g,o}^o}{e_o^o}, \quad \text{továbbá}$$

$$\frac{\frac{P_{t/+}}{P_g}}{\frac{P_{t/+}}{P_m}} = \frac{\frac{e_{t/+,o}^o}{e_{g,o}^o}}{\frac{e_{t/+,o}^o}{e_{m,o}^o}} = \frac{P_m}{P_g} = \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_{g,o}^o} = \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} = \frac{e_{m,o}^o}{e_{g,o}^o}, \quad \text{végül}$$

$$\frac{\frac{P_{t/+}}{P}}{\frac{P_{t/+}}{P_m}} = \frac{\frac{e_{t/+,o}^o}{e_o^o}}{\frac{e_{t/+,o}^o}{e_{m,o}^o}} = \frac{P_m}{P} = \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_o^o} = \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_o^o} = \frac{e_{m,o}^o}{e_o^o}.$$

Megállapítható tehát, hogy egy olyan stacionér népességben, melyben a gazdasági aktivitás, a munkaidő és a termelés korszpecifikus intenzitásai, ill. nagyságai is változatlanok:

- az egy lakosra jutó évi termelési többlet olyan arányban tér el az egy gazdaságilag aktív személyre jutó évi termelési többlettől, mint a gazdaságilag aktív személyek száma a népességszámtól, ill. mint a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam a születéskor várható átlagos összélettartamtól, és mint a születéskor várható gazdaságilag aktív élettartam alatti születések, ill. halálozások száma a születéskor várható összélettartam alattiakétól stb., továbbá

- az egy gazdaságilag aktív személyre jutó évi termelési többlet olyan arányban tér el az un. "állandóan dolgozó személyre" jutótól, mint az un. "állandóan dolgozók" száma a

gazdaságilag aktív népesség számától, ill., mint a születéskor várható átlagos munkaidő a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartamtól, és mint a születéskor várható átlagos munkaidő alatti születések, ill. halálozások száma a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam alattiakétól stb.; végül

- az egy lakosra jutó évi termelési többlet olyan arányban tér el az egy un. "állandóan dolgozó személyre" jutótól, mint az un. "állandóan dolgozók" száma a népességszámtól, ill. mint a születéskor várható átlagos munkaidő a születéskor várható átlagos összélettartamtól, és mint a születéskor várható átlagos munkaidő alatti születések, ill. halálozások száma a születéskor várható összélettartam alattiakétól stb.

Olyan stacionér népességben tehát, melyben a gazdasági aktivitás, a munkaidő és a termelési többlet korszpecifikus intenzitásai, ill. nagyságai is változatlanok:

- a születéskor várható átlagos összélettartam alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy lakosra jutó termelési többlet időben változatlan évi mennyisége mellett biztosítják a népesség évi összes termelési többletét;

- a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy gazdaságilag aktív személyre jutó termelési többlet időben változatlan évi mennyisége mellett biztosítják a népesség évi összes termelési többletét;

- a születéskor várható átlagos munkaidő alatt annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy un. "állandóan dolgozó személyre" jutó termelési többlet időben változatlan évi mennyisége mellett biztosítják a népesség évi összes termelési többletét. Továbbá:

$$P_{f/-/} = B \cdot e_{f/-/,0}^o = D \cdot e_{f/-/,0}^o,$$

vagyis bármely olyan stacionér népességben, melyben a fogyasztási többlet korszpecifikus nagyságai is változatlanok, az évi fogyasztási többlet az élveszületések, ill. halálozások évi számának és a születéskor várható fogyasztási többlet átlagos nagyságának a szorzataként is definiálható.

Mintthogy az ilyen stacionér népességben időben változatlan az évi összes fogyasztási többlet és az egy lakosra jutó évi fogyasztási többletnek a nagysága is, az évi összes fogyasztási többlet pedig az egy lakosra jutó évi fogyasztási többlet és a népességszám szorzataként is definiálható:

$$\begin{aligned} P_{f/-/} &= B \cdot e_{f/-/,0}^o = D \cdot e_{f/-/,0}^o = P \frac{P_{f/-/}}{P} = B \cdot e_o^o \frac{P_{f/-/}}{P} = \\ &= D \cdot e_o^o \frac{P_{f/-/}}{P} = P \frac{B \cdot e_{f/-/,0}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{f/-/,0}^o}{D \cdot e_o^o} = P \frac{e_{f/-/,0}^o}{e_o^o}, \end{aligned}$$

vagyis az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos összélettartam alatt

annyian születnek és annyian halnak meg, ahányan az egy lakosra jutó fogyasztási többlet évi nagysága mellett biztosítják a népesség évi fogyasztási többletét.

Olyan stacionér népesség esetében továbbá, melyben a gazdasági jelenségek kor-specifikus intenzitásai, illetve nagyságai is változatlanok, vagyis amely gazdasági szempontból is stacionér - azonkívül, hogy a népesség az átlagos élettartamnak (e_o^o) megfelelő idő alatt $e_o^o \cdot P$ számú évet, vagyis időben változatlan összlétszáma e_o^o -szorosának megfelelő számú évet él le, fennállanak a következő összefüggések is:

$e_o^o \cdot P_g = e_{g,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag aktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt összesen, továbbá:

$e_o^o \cdot P_i = e_{i,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag inaktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt összesen, továbbá:

$e_o^o \cdot P_m = e_{m,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyi munkaidő-évet dolgozik le, ahány évet az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt összesen leél, továbbá:

$e_o^o \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet tölt el mint nem-munkaidőt (szabadidőt), ahány évet az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt összesen leél, továbbá:

$e_o^o \cdot P_t = e_{t,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyit termel, amennyit egy év alatt termelne, ha ezalatt mindenki teljes élettartam alatti termelését produkálná, továbbá:

$e_o^o \cdot P_f = e_{f,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyit fogyaszt, amennyit egy év alatt fogyasztana, ha ezalatt mindenki teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, továbbá:

$e_o^o \cdot P_{t/+} = e_{t/+,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyival termel többet, mint amennyit fogyaszt, amekkora egy év alatti termelési többlete lenne, ha ezalatt mindenki teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, illetve, ha az egy év alatti és az élettartam alatti fogyasztás volumene meghaladja a termelését;

$e_o^o \cdot P_{f/-} = e_{f/-,o}^o \cdot P$, vagyis a népesség az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt annyival fogyaszt többet, mint amennyit termel, amekkora egy év alatti fogyasztási többlete lenne, ha ezalatt mindenki teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg.

Ilyen népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak ($e_{g,o}^o$) megfelelő idő alatt $e_{g,o}^o \cdot P_g$ számú évet, vagyis a gazdaságilag aktív népesség időben változatlan lét-

száma $e_{g,o}^0$ -szorosának megfelelő számú évet él le gazdaságilag aktív állapotban összesen, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P = e_o^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet él le összesen, ahány évet az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt gazdaságilag aktív állapotban, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_i = e_{i,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag inaktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt gazdaságilag aktív állapotban, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_m = e_{m,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi munkaidő-évet dolgozik le, ahány évet az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt gazdaságilag aktív állapotban leél, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet tölt el mint nem-munkaidőt (szabadidőt), ahány évet az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt gazdaságilag aktív állapotban leél, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_t = e_{t,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyit termel, amennyit a gazdaságilag aktív népesség egy év alatt termelne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_f = e_{f,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartam alatt annyit fogyaszt, amennyit a gazdaságilag aktív népesség egy év alatt fogyasztana, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_{t/+} = e_{t/+,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyival termel többet, mint amennyit fogyaszt, amekkora a gazdaságilag aktív népesség évi termelési többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, illetve ha az egy év alatti és az élettartam alatti fogyasztás volumene meghaladja a termelését, továbbá:

$e_{g,o}^0 \cdot P_{f/-} = e_{f/-,o}^0 \cdot P_g$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyival fogyaszt többet, mint amennyit termel, amekkora a gazdaságilag aktív népesség egy év alatti fogyasztási többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg.

Ilyen stacionér népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak ($e_{i,o}^0$) megfelelő idő alatt $e_{i,o}^0 \cdot P_i$ számú évet, vagyis a gazdaságilag inaktív népesség időben változatlan létszáma $e_{i,o}^0$ - szorozásának megfelelő számú évet él le gazdaságilag inaktív állapotban összesen, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P = e_o^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet él le összesen, ahány évet az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt gazdaságilag inaktív állapotban, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P_g = e_{g,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag aktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt gazdaságilag inaktív állapotban, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P_m = e_{m,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi munkaidő-évet dolgozik le, ahány évet az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt gazdaságilag inaktív állapotban leél, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyi évet tölt el mint nem-munkaidőt (szabadidőt), ahány évet az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt gazdaságilag inaktív állapotban leél, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P_t = e_{t,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyit termel, amennyit a gazdaságilag inaktív népesség egy év alatt termelne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P_f = e_{f,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartam alatt annyit fogyaszt, amennyit a gazdaságilag inaktív népesség egy év alatt fogyasztana, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, továbbá:

$e_{i,o}^0 \cdot P_{t/+} = e_{t/+,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyival termel többet, mint amennyit fogyaszt, amekkora a gazdaságilag inaktív népesség évi termelési többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, illetve, ha az egy év alatti és az élettartam alatti fogyasztás volumene meghaladja a termelését:

$e_{i,o}^0 \cdot P_{f/-} = e_{f/-,o}^0 \cdot P_i$, vagyis a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt annyival fogyaszt többet, mint amennyit termel, amekkora a gazdaságilag inaktív népesség egy év alatti fogyasztási többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg.

Ilyen stacionér népesség az átlagos munkaidőnek ($e_{m,o}^0$) megfelelő idő alatt $e_{m,o}^0 \cdot P_m$ számú évet, vagyis az un. mindig dolgozó stacionér népesség időben változatlan létszáma $e_{m,o}^0$ - szorozásának megfelelő számú évet dolgozik le, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P = e_o^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annyi évet él le összesen, ahány évet az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt munkaidőként ledolgozik, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P_g = e_{g,o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag aktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt munkaidőként ledolgozik, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P_i = e_{i,o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag inaktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt munkaidőként ledolgozik, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annyi évet tölt el mint nem-munkaidőt (szabadidőt), ahány évet az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt munkaidőként ledolgozik, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P_t = e_{t,o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annyit termel, amennyit az un. mindig dolgozó stacionér népesség egy év alatt termelne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P_f = e_{f,o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annyit fogyaszt, amennyit az un. mindig dolgozó stacionér népesség egy év alatt fogyasztana, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, továbbá:

$e_{m,o}^0 \cdot P_{t/+ , o} = e_{t/+ , o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annival termel többet, mint amennyit fogyaszt, amekkora az un. mindig dolgozó stacionér népesség évi termelési többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, illetve, ha az egy év alatti és az élettartam alatti fogyasztás volumene meghaladja a termelését:

$e_{m,o}^0 \cdot P_{f/- , o} = e_{f/- , o}^0 \cdot P_m$, vagyis a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt annival fogyaszt többet, mint amennyit termel, amekkora az un. mindig dolgozó stacionér népesség egy év alatti fogyasztási többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg.

Ilyen stacionér népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) ($e_{sz,o}^0$) megfelelő idő alatt $e_{sz,o}^0 \cdot P_{sz}$ számú évet, vagyis az un. sosem dolgozó stacionér népesség

időben változatlan létszáma $e_{sz,o}^0$ - szorosának megfelelő számú évet él le nem-munkaidőként (szabadidőként), továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P = e_o^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyi évet él le összesen, ahány évet az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt nem-munkaidőként (szabadidőként), továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_g = e_{g,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag aktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt nem-munkaidőként (szabadidőként), továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_i = e_{i,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyi évet él le gazdaságilag inaktív állapotban, ahány évet az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt nem-munkaidőként (szabadidőként), továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_m = e_{m,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyi munkaidő-évet dolgozik le, ahány évet az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt nem-munkaidőként (szabadidőként) eltölt, továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_t = e_{t,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyit termel, amennyit az un. sosem dolgozó stacionér népesség egy év alatt termelne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_f = e_{f,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyit fogyaszt, amennyit az un. sosem dolgozó stacionér népesség egy év alatt fogyasztana, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, továbbá:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_{t/+} = e_{t/+,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyival termel többet, mint amennyit elfogyaszt, amekkora az un. sosem dolgozó stacionér népesség évi termelési többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, illetve ha az egy év alatti és az élettartam alatti fogyasztás volumene meghaladja a termelését:

$e_{sz,o}^0 \cdot P_{f/-} = e_{f/-,o}^0 \cdot P_{sz}$, vagyis a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt annyival fogyaszt többet, mint amennyit termel, amekkora az un. sosem dolgozó stacionér népesség egy év alatti fogyasztási többlete lenne, ha ezalatt ezen alnépesség minden tagja az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg.

Ilyen stacionér népességben továbbá:

$e_{t,o}^o \cdot P = e_o^o \cdot P_t$, vagyis ha egy év alatt mindenki egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, akkor a népesség ezalatt annyit termelne, amennyit az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt termel, továbbá:

$e_{t,o}^o \cdot P_g = e_{g,o}^o \cdot P_t$, vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag aktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, akkor a gazdaságilag aktív népesség ezalatt annyit termelne, amennyit a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt termel, továbbá:

$e_{t,o}^o \cdot P_i = e_{i,o}^o \cdot P_t$, vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag inaktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, akkor a gazdaságilag inaktív népesség ezalatt annyit termelne, amennyit a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt termel, továbbá:

$e_{t,o}^o \cdot P_m = e_{m,o}^o \cdot P_t$, vagyis ha egy év alatt minden un. mindig dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, akkor az un. mindig dolgozó stacionér népesség ezalatt annyit termelne, amennyit a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt termel, továbbá:

$e_{t,o}^o \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^o \cdot P_t$, vagyis ha egy év alatt minden un. sosem dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelését produkálná, akkor az un. sosem dolgozó stacionér népesség ezalatt annyit termelne, amennyit a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt termel:

Fennállnak természetesen az:

$$e_{t,o}^o \cdot P_f = e_{f,o}^o \cdot P_t ;$$

$$e_{t,o}^o \cdot P_{t/+} = e_{t/+,o}^o \cdot P_t ,$$

illetve

$$e_{t,o}^o \cdot P_{f/-} = e_{f/-,o}^o \cdot P_t$$

összefüggések is.

A szóban forgó stacionér népességben:

$e_{f,o}^o \cdot P = e_o^o \cdot P_f$, vagyis ha egy év alatt mindenki egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, akkor a népesség ezalatt annyit fogyasztana, amennyit az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt fogyaszt, továbbá:

$e_{f,o}^o \cdot P_g = e_{g,o}^o \cdot P_f$, vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag aktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, akkor a gazdaságilag aktív népesség ezalatt annyit fogyasztana, amennyit a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt fogyaszt, továbbá:

$e_{f,o}^0 \cdot P_i = e_{i,o}^0 \cdot P_f$, vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag inaktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, akkor a gazdaságilag inaktív népesség ezalatt annyit fogyasztana, amennyit a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt fogyaszt, továbbá:

$e_{f,o}^0 \cdot P_m = e_{m,o}^0 \cdot P_f$, vagyis ha egy év alatt minden un. mindig dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, akkor az un. mindig dolgozó stacionér népesség ezalatt annyit fogyasztana, amennyit a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt fogyaszt, továbbá:

$e_{f,o}^0 \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^0 \cdot P_f$, vagyis ha egy év alatt minden un. sosem dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztását valósítaná meg, akkor az un. sosem dolgozó stacionér népesség ezalatt annyit fogyasztana, amennyit a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt fogyaszt.

Fennállnak természetesen a :

$$e_{f,o}^0 \cdot P_t = e_{t,o}^0 \cdot P_f ;$$

$$e_{f,o}^0 \cdot P_{t/+} = e_{t/+,o}^0 \cdot P_f ;$$

illetve

$$e_{f,o}^0 \cdot P_{f/-} = e_{f/-,o}^0 \cdot P_f ;$$

összefüggések is.

Az ilyen stacionér népességben:

$e_{t/+,o}^0 \cdot P = e_o^0 \cdot P_{t/+}$, vagyis ha egy év alatt mindenki az átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, akkor a népesség ezalatt annyi termelési többletet állítana elő, amennyit az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatt produkál, továbbá:

$e_{t/+,o}^0 \cdot P_g = e_{g,o}^0 \cdot P_{t/+}$, vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag aktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, akkor a gazdaságilag aktív népesség ezalatt annyi termelési többletet állítana elő, amennyit a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatt produkál, továbbá:

$e_{t/+,o}^0 \cdot P_i = e_{i,o}^0 \cdot P_{t/+}$, vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag inaktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálná, akkor a gazdaságilag inaktív népesség ezalatt annyi termelési többletet állítana elő, amennyit a népesség az átlagos gazdaságilag inaktív élettartamnak megfelelő idő alatt produkál, továbbá:

$$e_{t/+,o}^0 \cdot P_m = e_{m,o}^0 \cdot P_{t/+}$$
, vagyis ha egy év alatt minden un. mindig dol-

gozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletet produkálna, akkor az un. mindig dolgozó stacionér népesség ezalatt annyi termelési többletet állítana elő, amennyit a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatt produkál, továbbá:

$$e_{t/+/,o}^o \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^o \cdot P_{t/+/},$$
 vagyis ha egy év alatt minden un. sosem dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti termelési többletét produkálna, akkor az un. sosem dolgozó stacionér népesség ezalatt annyi termelési többletet állítana elő, amennyit a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatt produkál.

Fennállnak természetesen a :

$$e_{t/+/}^o \cdot P_t = e_{t,o}^o \cdot P_{t/+/};$$

$$e_{t/+/,o}^o \cdot P_f = e_{f,o}^o \cdot P_{t/+/},$$

illetve

$$e_{t/+/,o}^o \cdot P_{f/-/} = e_{f/-/,o}^o \cdot P_{t/+/} \text{ összefüggések is.}$$

Amennyiben a szóban forgó stacionér népességben az egy év alatti és az élettartam alatti fogyasztás volumene meghaladja a termelését:

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P = e_o^o \cdot P_{f/-/},$$
 vagyis ha egy év alatt mindenki az átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg, akkor a népesség fogyasztása ezalatt annnyival haladná meg termelését, amekkora az átlagos élettartamnak megfelelő idő alatti fogyasztási többlete lenne, továbbá:

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P_g = e_{g,o}^o \cdot P_{f/-/},$$
 vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag aktív személy egy átlagos ember teljes élettartama alatti fogyasztási többletét valósítaná meg, akkor a gazdaságilag aktív népesség fogyasztása ezalatt annnyival haladná meg termelését, amekkora a népesség az átlagos gazdaságilag aktív élettartamnak megfelelő idő alatti fogyasztási többlet lenne, továbbá:

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P_i = e_{i,o}^o \cdot P_{f/-/},$$
 vagyis ha egy év alatt minden gazdaságilag inaktív személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg, akkor a gazdaságilag inaktív népesség fogyasztása ezalatt annnyival haladná meg termelését, amekkora a népesség átlagos gazdaságilag inaktív élettartamának megfelelő idő alatti fogyasztási többlete lenne, továbbá:

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P_m = e_{m,o}^o \cdot P_{f/-/},$$
 vagyis ha egy év alatt minden un. mindig dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg, akkor az un. mindig dolgozó stacionér népesség fogyasztása ezalatt annnyival haladná meg termelését, amekkora a népesség az átlagos munkaidőnek megfelelő idő alatti fogyasztási többlete lenne, továbbá:

$e_{f/-/,o}^o \cdot P_{sz} = e_{sz,o}^o \cdot P_{f/-/}$, vagyis ha egy év alatt minden un. sosem dolgozó személy egy átlagos ember teljes élettartam alatti fogyasztási többletét valósítaná meg, akkor az un. sosem dolgozó stacionér népesség fogyasztása ezalatt annyival haladná meg termelését, amekkora a népesség az átlagos nem-munkaidőnek (szabadidőnek) megfelelő idő alatti fogyasztási többlete lenne.

Fennállnak természetesen a :

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P_t = e_{t,o}^o \cdot P_{f/-/} ;$$

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P_f = e_{f,o}^o \cdot P_{f/-/} ,$$

illetve

$$e_{f/-/,o}^o \cdot P_{t+/} = e_{t+/ ,o}^o \cdot P_{f/-/} \text{ összefüggések is.}$$

A felsorolt összefüggések alapján jelentősen szaporíthatók a stacionér népesség időben változatlan számának, illetve a stacionér népesség által egy év alatt leélt összes évek időben változatlan számának (P), a gazdaságilag aktív stacionér népesség időben változatlan számának, illetve a stacionér népesség által egy év alatt gazdaságilag aktív állapotban leélt évek időben változatlan számának (P_g), a gazdaságilag inaktív stacionér népesség időben változatlan számának, illetve a stacionér népesség által egy év alatt gazdaságilag inaktív állapotban leélt évek időben változatlan számának (P_i), az un. mindig dolgozó stacionér népesség időben változatlan számának, illetve a stacionér népesség által egy év alatt ledolgozott munkaidő-évek időben változatlan számának (P_m), az un. sosem dolgozó stacionér népesség időben változatlan számának, illetve a stacionér népesség által egy év alatt nem-munkaidőként (szabadidőként) leélt évek időben változatlan számának (P_{sz}), valamint a stacionér népesség időben változatlan volumenű évi termelésének (P_t), fogyasztásának (P_f), termelési többletének ($P_{t+/}$), illetve fogyasztási többletének ($P_{f/-/}$) a matematikai meghatározásai, valamint a születéskor várható átlagos élettartamnak és a gazdasági jelenségek születéskor várható átlagos mennyiségeinek a meghatározására szolgáló formulák is.

$$\begin{aligned} \text{Minthogy } B = D = \frac{P}{e_o^o} &= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} = \frac{P_i}{e_{i,o}^o} = \frac{P_m}{e_{m,o}^o} = \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} = \frac{P_t}{e_{t,o}^o} = \frac{P_f}{e_{f,o}^o} = \\ &= \frac{P_{t+/}}{e_{t+/ ,o}^o} = \frac{P_{f/-/}}{e_{f/-/,o}^o} = \text{ stb., megállapítható, hogy} \end{aligned}$$

$$P = B \cdot e_o^o = D \cdot e_o^o = \frac{P}{e_o^o} \cdot e_o^o = P \frac{e_o^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_o^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_o^o}{D \cdot e_o^o} =$$

$$\begin{aligned}
&= B \cdot e_o^{t,o} \frac{P}{P} = D \cdot e_o^{t,o} \frac{P}{P} = P \frac{t}{P} = \frac{P}{P} \\
&= \frac{P}{P} \cdot e_o^{t,o} = P \frac{t}{P} = P \frac{B \cdot e_o^{t,o}}{D \cdot e_o^{t,o}} = \frac{B \cdot e_o^{t,o}}{D \cdot e_o^{t,o}} \\
&= B \cdot e_o^{sz,o} \frac{P}{P} = D \cdot e_o^{sz,o} \frac{P}{P} = P \frac{sz}{P} = \frac{D}{P} \\
&= \frac{P}{P} \cdot e_o^{sz,o} = P \frac{sz}{P} = P \frac{B \cdot e_o^{sz,o}}{D \cdot e_o^{sz,o}} = \frac{B \cdot e_o^{sz,o}}{D \cdot e_o^{sz,o}} \\
&= B \cdot e_o^{m,o} \frac{P}{P} = D \cdot e_o^{m,o} \frac{P}{P} = P \frac{m}{P} = \frac{P}{P} \\
&= \frac{P}{P} \cdot e_o^{m,o} = P \frac{m}{P} = P \frac{B \cdot e_o^{m,o}}{D \cdot e_o^{m,o}} = \frac{B \cdot e_o^{m,o}}{D \cdot e_o^{m,o}} \\
&= B \cdot e_o^{i,o} \frac{P}{P} = D \cdot e_o^{i,o} \frac{P}{P} = P \frac{i}{P} = \frac{P}{P} \\
&= \frac{P}{P} \cdot e_o^{i,o} = P \frac{i}{P} = P \frac{B \cdot e_o^{i,o}}{D \cdot e_o^{i,o}} = \frac{B \cdot e_o^{i,o}}{D \cdot e_o^{i,o}} \\
&= B \cdot e_o^{g,o} \frac{P}{P} = D \cdot e_o^{g,o} \frac{P}{P} = P \frac{g}{P} = \frac{P}{P} \\
&= \frac{P}{P} \cdot e_o^{g,o} = P \frac{g}{P} = P \frac{B \cdot e_o^{g,o}}{D \cdot e_o^{g,o}} = \frac{B \cdot e_o^{g,o}}{D \cdot e_o^{g,o}} \\
&= B \cdot e_o \frac{P}{P} = D \cdot e_o \frac{P}{P} = P \frac{P}{P} = \frac{P}{P}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} \cdot e_o^o = P_f \frac{e_o^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B \cdot e_o^o}{B \cdot e_{f,o}^o} = P_f \frac{D \cdot e_o^o}{D \cdot e_{f,o}^o} = \\
&= B \cdot e_{f,o}^o \frac{P}{P_f} = D \cdot e_{f,o}^o \frac{P}{P_f} = P_f \frac{P}{P_f} = \\
&= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+,o}^o} \cdot e_o^o = P_{t/+} \frac{e_o^o}{e_{t/+,o}^o} = P_{t/+} \frac{B \cdot e_o^o}{B \cdot e_{t/+,o}^o} = \\
&= P_{t/+} \frac{D \cdot e_o^o}{D \cdot e_{t/+,o}^o} = B \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P}{P_{t/+}} = D \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P}{P_{t/+}} = \\
&= P_{t/+} \frac{P}{P_{t/+}},
\end{aligned}$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel.

$$\begin{aligned}
P &= \frac{P_{f/-}}{e_{o/-}^o} \cdot e_o^o = P_{f/-} \frac{e_o^o}{e_{f/-,o}^o} = P_{f/-} \frac{B \cdot e_o^o}{B \cdot e_{f/-,o}^o} = \\
&= P_{f/-} \frac{D \cdot e_o^o}{D \cdot e_{f/-,o}^o} = B \cdot e_{f/-,o}^o \cdot \frac{P}{P_{f/-}} = D \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P}{P_{f/-}} = \\
&= P_{f/-} \frac{P}{P_{f/-}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_g &= B \cdot e_{g,o}^o = D \cdot e_{g,o}^o = \frac{P}{e_o^o} \cdot e_{g,o}^o = P \cdot \frac{e_{g,o}^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_o^o} = \\
&= B \cdot e_o^o \frac{P_g}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_g}{P} = P \frac{P_g}{P} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} \cdot e_{g,o}^o = P_g \frac{e_{g,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_{g,o}^o} = P_g \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{g,o}^o \frac{P_g}{P_g} = D \cdot e_{g,o}^o \frac{P_g}{P_g} = P_g \frac{P_g}{P_g} =$$

$$= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} \cdot e_{i,o}^o = P_i \frac{e_{i,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B \cdot e_{i,o}^o}{B \cdot e_{i,o}^o} = P_i \frac{D \cdot e_{i,o}^o}{D \cdot e_{i,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{i,o}^o \frac{P_i}{P_i} = D \cdot e_{i,o}^o \frac{P_i}{P_i} = P_i \frac{P_i}{P_i} =$$

$$= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} \cdot e_{m,o}^o = P_m \frac{e_{m,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_{m,o}^o} = P_m \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_{m,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{m,o}^o \frac{P_m}{P_m} = D \cdot e_{m,o}^o \frac{P_m}{P_m} = P_m \frac{P_m}{P_m} =$$

$$= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} \cdot e_{sz,o}^o = P_{sz} \frac{e_{sz,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B \cdot e_{sz,o}^o}{B \cdot e_{sz,o}^o} =$$

$$= P_{sz} \frac{D \cdot e_{sz,o}^o}{D \cdot e_{sz,o}^o} = B \cdot e_{sz,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{sz}} = D \cdot e_{sz,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{sz}} =$$

$$= P_{sz} \frac{P_{sz}}{P_{sz}} =$$

$$= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} \cdot e_{t,o}^o = P_t \frac{e_{t,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_{t,o}^o} = P_t \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_{t,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{t,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_t} = D \cdot e_{t,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_t} = P_t \cdot \frac{P_g}{P_t} =$$

$$= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} \cdot e_{g,o}^o = P_f \frac{e_{g,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_{f,o}^o} = P_f \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_{f,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{f,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_f} = D \cdot e_{f,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_f} = P_f \cdot \frac{P_g}{P_f} =$$

$$= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+,o}^o} \cdot e_{g,o}^o = P_{t/+} \frac{e_{g,o}^o}{e_{t/+,o}^o} = P_{t/+} \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_{t/+,o}^o} =$$

$$= P_{t/+} \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_{t/+,o}^o} = B \cdot e_{t/+,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_{t/+}} =$$

$$= D \cdot e_{t/+,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_{t/+}} = P_{t/+} \cdot \frac{P_g}{P_{t/+}},$$

illetve ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$P_g = \frac{P_{f/-}}{e_{f/-,o}^o} \cdot e_{g,o}^o = P_{f/-} \frac{e_{g,o}^o}{e_{f/-,o}^o} =$$

$$= P_{f/-} \frac{B \cdot e_{g,o}^o}{B \cdot e_{f/-,o}^o} = P_{f/-} \frac{D \cdot e_{g,o}^o}{D \cdot e_{f/-,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{f/-,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_{f/-}} = D \cdot e_{f/-,o}^o \cdot \frac{P_g}{P_{f/-}} = P_{f/-} \cdot \frac{P_g}{P_{f/-}}.$$

$$\cdot P_i = B \cdot e_{i,o}^o = D \cdot e_{i,o}^o = \frac{P}{e_o^o} e_{i,o}^o = P \frac{e_{i,o}^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_{i,o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{i,o}^o}{D \cdot e_o^o} =$$

$$= B.e_o^o \frac{P_i}{P} = D.e_o^o \frac{P_i}{P} = P \frac{P_i}{P} =$$

$$= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{i,o}^o = P_g \frac{e_{i,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B.e_{i,o}^o}{B.e_{g,o}^o} = P_g \frac{D.e_{i,o}^o}{D.e_{g,o}^o} =$$

$$= B.e_{g,o}^o \frac{P_i}{P_g} = D.e_{g,o}^o \frac{P_i}{P_g} = P_g \frac{P_i}{P_g} =$$

$$= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{i,o}^o = P_i \frac{e_{i,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B.e_{i,o}^o}{B.e_{i,o}^o} = P_i \frac{D.e_{i,o}^o}{D.e_{i,o}^o} =$$

$$= B.e_{i,o}^o \frac{P_i}{P_i} = D.e_i^o \frac{P_i}{P_i} = P_i \frac{P_i}{P_i} =$$

$$= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{i,o}^o = P_m \frac{e_{i,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B.e_{i,o}^o}{B.e_{m,o}^o} = P_m \frac{D.e_{i,o}^o}{D.e_{m,o}^o} =$$

$$= B.e_{m,o}^o \frac{P_i}{P_m} = D.e_{m,o}^o \frac{P_i}{P_m} = P_m \frac{P_i}{P_m} =$$

$$= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{i,o}^o = P_{sz} \frac{e_{i,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B.e_{i,o}^o}{B.e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{D.e_{i,o}^o}{D.e_{sz,o}^o} =$$

$$= B.e_{sz,o}^o \frac{P_i}{P_{sz}} = D.e_{sz,o}^o \frac{P_i}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_i}{P_{sz}} =$$

$$= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{i,o}^o = P_t \frac{e_{i,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B.e_{i,o}^o}{B.e_{t,o}^o} = P_t \frac{D.e_{i,o}^o}{D.e_{t,o}^o} =$$

$$= B.e_{t,o}^o \frac{P_i}{P_t} = D.e_{t,o}^o \frac{P_i}{P_t} = P_t \frac{P_i}{P_t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{i,o}^o = P_f \frac{e_{i,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B \cdot e_{i,o}^o}{B \cdot e_{f,o}^o} = P_f \frac{D \cdot e_{i,o}^o}{D \cdot e_{f,o}^o} = \\
&= B \cdot e_{f,o}^o \frac{P_i}{P_f} = D \cdot e_{f,o}^o \frac{P_i}{P_f} = P_f \frac{P_i}{P_f} = \\
&= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+,o}^o} e_{i,o}^o = P_{t/+} \frac{e_{i,o}^o}{e_{t/+,o}^o} = P_{t/+} \frac{B \cdot e_{i,o}^o}{B \cdot e_{t/+,o}^o} = \\
&= P_{t/+} \cdot \frac{D \cdot e_{i,o}^o}{D \cdot e_{t/+,o}^o} = B \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P_i}{P_{t/+}} = D \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P_i}{P_{t/+}} = \\
&= P_{t/+} \frac{P_i}{P_{t/+}} ,
\end{aligned}$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$\begin{aligned}
P_i &= \frac{P_{f/-}}{e_{f/-,o}^o} e_{i,o}^o = P_{f/-} \frac{e_{i,o}^o}{e_{f/-,o}^o} = P_{f/-} \frac{B \cdot e_{i,o}^o}{B \cdot e_{f/-,o}^o} = \\
&= P_{f/-} \frac{D \cdot e_{i,o}^o}{D \cdot e_{f/-,o}^o} = B \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P_i}{P_{f/-}} = \\
&= D \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P_i}{P_{f/-}} = P_{f/-} \frac{P_i}{P_{f/-}} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_m &= B \cdot o_{m,o}^o = D \cdot e_{m,o}^o = \frac{P}{e_o^o} e_{m,o}^o = P \frac{e_{m,o}^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_o^o} = \\
&= B \cdot e_o^o \frac{P_m}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_m}{P} = P \frac{P_m}{P} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{m,o}^o = P_g \frac{e_{m,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B.e_{m,o}^o}{B.e_{g,o}^o} = P_g \frac{D.e_{m,o}^o}{D.e_{g,o}^o} =$$

$$= B.e_{g,o}^o \frac{P_m}{P_g} = D.e_{g,o}^o \frac{P_m}{P_g} = P_g \frac{P_m}{P_g} =$$

$$= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{m,o}^o = P_i \frac{e_{m,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B.e_{m,o}^o}{B.e_{i,o}^o} = P_i \frac{D.e_{m,o}^o}{D.e_{i,o}^o} =$$

$$= B.e_{i,o}^o \frac{P_m}{P_i} = D.e_{i,o}^o \frac{P_m}{P_i} = P_i \frac{P_m}{P_i} =$$

$$= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{m,o}^o = P_m \frac{e_{m,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B.e_{m,o}^o}{B.e_{m,o}^o} = P_m \frac{D.e_{m,o}^o}{D.e_{m,o}^o} =$$

$$= B.e_{m,o}^o \frac{P_m}{P_m} = D.e_{m,o}^o \frac{P_m}{P_m} = P_m \frac{P_m}{P_m} =$$

$$= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{m,o}^o = P_{sz} \frac{e_{m,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B.e_{m,o}^o}{B.e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{D.e_{m,o}^o}{D.e_{sz,o}^o} =$$

$$= B.e_{sz,o}^o \frac{P_m}{P_{sz}} = D.e_{sz,o}^o \frac{P_m}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_m}{P_{sz}} =$$

$$= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{m,o}^o = P_t \frac{e_{m,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B.e_{m,o}^o}{B.e_{t,o}^o} = P_t \frac{D.e_{m,o}^o}{D.e_{t,o}^o} =$$

$$= B.e_{t,o}^o \frac{P_m}{P_t} = D.e_{t,o}^o \frac{P_m}{P_t} = P_t \frac{P_m}{P_t} =$$

$$= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{m,o}^o = P_f \frac{e_{m,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B.e_{m,o}^o}{B.e_{f,o}^o} = P_f \frac{D.e_{m,o}^o}{D.e_{f,o}^o} =$$

$$\begin{aligned}
&= B \cdot e_{f,o}^o \frac{P_m}{P_f} = D \cdot e_{f,o}^o \frac{P_m}{P_f} = P_f \frac{P_m}{P_f} = \\
&= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+,o}^o} e_{m,o}^o = P_{t/+} \frac{e_{m,o}^o}{e_{t/+,o}^o} = P_{t/+} \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_{t/+,o}^o} = \\
&= P_{t/+} \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_{t/+,o}^o} = B \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P_m}{P_{t/+}} = D \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P_m}{P_{t/+}} = \\
&= P_{t/+} \frac{P_m}{P_{t/+}} ,
\end{aligned}$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$\begin{aligned}
P_m &= \frac{P_{f/-}}{e_{f/-,o}^o} e_{m,o}^o = P_{f/-} \frac{e_{m,o}^o}{e_{f/-,o}^o} = P_{f/-} \frac{B \cdot e_{m,o}^o}{B \cdot e_{f/-,o}^o} = \\
&= P_{f/-} \frac{D \cdot e_{m,o}^o}{D \cdot e_{f/-,o}^o} = B \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P_m}{P_{f/-}} = \\
&= D \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P_m}{P_{f/-}} = P_{f/-} \frac{P_m}{P_{f/-}} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{sz} &= B \cdot e_{sz,o}^o = D \cdot e_{sz,o}^o = \frac{P}{e_o^o} e_{sz,o}^o = P \frac{e_{sz,o}^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_{sz,o}^o}{B \cdot e_o^o} = \\
&= P \frac{D \cdot e_{sz,o}^o}{D \cdot e_o^o} =
\end{aligned}$$

$$= B \cdot e_o^o \frac{P_{sz}}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_{sz}}{P} = P \frac{P_{sz}}{P} =$$

$$= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{sz,o}^o = P_g \frac{e_{sz,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B.e_{sz,o}^o}{B.e_{g,o}^o} = P_g \frac{D.e_{sz,o}^o}{D.e_{g,o}^o} =$$

$$= B.e_{g,o}^o \frac{P_{sz}}{P_g} = D.e_{g,o}^o \frac{P_{sz}}{P_g} = P_g \frac{P_{sz}}{P_g} =$$

$$= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{sz,o}^o = P_i \frac{e_{sz,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B.e_{sz,o}^o}{B.e_{i,o}^o} = P_i \frac{D.e_{sz,o}^o}{D.e_{i,o}^o} =$$

$$= B.e_{i,o}^o \frac{P_{sz}}{P_i} = D.e_{i,o}^o \frac{P_{sz}}{P_i} = P_i \frac{P_{sz}}{P_i} =$$

$$= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{sz,o}^o = P_m \frac{e_{sz,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B.e_{sz,o}^o}{B.e_{m,o}^o} = P_m \frac{D.e_{sz,o}^o}{D.e_{m,o}^o} =$$

$$= B.e_{m,o}^o \frac{P_{sz}}{P_m} = D.e_{m,o}^o \frac{P_{sz}}{P_m} = P_m \frac{P_{sz}}{P_m} =$$

$$= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{sz,o}^o = P_{sz} \frac{e_{sz,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B.e_{sz,o}^o}{B.e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{D.e_{sz,o}^o}{D.e_{sz,o}^o} =$$

$$= B.e_{sz,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{sz}} = D.e_{sz,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_{sz}}{P_{sz}} =$$

$$= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{sz,o}^o = P_t \frac{e_{sz,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B.e_{sz,o}^o}{B.e_{t,o}^o} = P_t \frac{D.e_{sz,o}^o}{D.e_{t,o}^o} =$$

$$= B.e_{t,o}^o \frac{P_{sz}}{P_t} = D.e_{t,o}^o \frac{P_{sz}}{P_t} = P_t \frac{P_{sz}}{P_t} =$$

$$= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{sz,o}^o = P_f \frac{e_{sz,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B.e_{sz,o}^o}{B.e_{f,o}^o} = P_f \frac{D.e_{sz,o}^o}{D.e_{f,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{f,o}^o \frac{P_{sz}}{P_f} = D \cdot e_{f,o}^o \frac{P_{sz}}{P_f} = P_f \frac{P_{sz}}{P_f} =$$

$$= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+,o}^o} e_{sz,o}^o = P_{t/+} \frac{e_{sz,o}^o}{e_{t/+,o}^o} = P_{t/+} \frac{B \cdot e_{sz,o}^o}{B \cdot e_{t/+,o}^o} =$$

$$= P_{t/+} \frac{D \cdot e_{sz,o}^o}{D \cdot e_{t/+,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{t/+}} = D \cdot e_{t/+,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{t/+}} = P_{t/+} \frac{P_{sz}}{P_{t/+}},$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$= \frac{P_{f/-}}{e_{f/-,o}^o} e_{sz,o}^o = P_{f/-} \frac{e_{sz,o}^o}{e_{f/-,o}^o} = P_{f/-} \frac{B \cdot e_{sz,o}^o}{B \cdot e_{f/-,o}^o} =$$

$$= P_{f/-} \frac{D \cdot e_{sz,o}^o}{D \cdot e_{f/-,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{f/-}} = D \cdot e_{f/-,o}^o \frac{P_{sz}}{P_{f/-}} = P_{f/-} \frac{P_{sz}}{P_{f/-}},$$

$$P_t = B \cdot e_{t,o}^o = D \cdot e_{t,o}^o = \frac{P}{e_o^o} e_{t,o}^o = P \frac{e_{t,o}^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_o^o} =$$

$$= B \cdot e_o^o \frac{P_t}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_t}{P} = P \frac{P_t}{P} =$$

$$= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{t,o}^o = P_g \frac{e_{t,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_{g,o}^o} = P_g \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} =$$

$$= B.e_{g,o}^o \frac{P_t}{P_g} = D.e_{g,o}^o \frac{P_t}{P_g} = P_g \frac{P_t}{P_g} =$$

$$= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{t,o}^o = P_i \frac{e_{t,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B.e_{t,o}^o}{B.e_{i,o}^o} = P_i \frac{D.e_{t,o}^o}{D.e_{i,o}^o} =$$

$$= B.e_{i,o}^o \frac{P_t}{P_i} = D.e_{i,o}^o \frac{P_t}{P_i} = P_i \frac{P_t}{P_i} =$$

$$= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{t,o}^o = P_m \frac{e_{t,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B.e_{t,o}^o}{B.e_{m,o}^o} = P_m \frac{D.e_{t,o}^o}{D.e_{m,o}^o} =$$

$$= B.e_{m,o}^o \frac{P_t}{P_m} = D.e_{m,o}^o \frac{P_t}{P_m} = P_m \frac{P_t}{P_m} =$$

$$= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{t,o}^o = P_{sz} \frac{e_{t,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B.e_{t,o}^o}{B.e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{D.e_{t,o}^o}{D.e_{sz,o}^o} =$$

$$= B.e_{sz,o}^o \frac{P_t}{P_{sz}} = D.e_{sz,o}^o \frac{P_t}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_t}{P_{sz}} =$$

$$= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{t,o}^o = P_t \frac{e_{t,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B.e_{t,o}^o}{B.e_{t,o}^o} = P_t \frac{D.e_{t,o}^o}{D.e_{t,o}^o} =$$

$$= B.e_{t,o}^o \frac{P_t}{P_t} = D.e_{t,o}^o \frac{P_t}{P_t} = P_t \frac{P_t}{P_t} =$$

$$= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{t,o}^o = P_f \frac{e_{t,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B.e_{t,o}^o}{B.e_{f,o}^o} = P_f \frac{D.e_{t,o}^o}{D.e_{f,o}^o} =$$

$$= B \cdot e_{f,o}^o \frac{P_t}{P_f} = D \cdot e_{f,o}^o \frac{P_t}{P_f} = P_f \frac{P_t}{P_f} =$$

$$= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+}^o} e_{t,o}^o = P_{t/+} \frac{e_{t,o}^o}{e_{t/+}^o} = P_{t/+} \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_{t/+}^o} =$$

$$= P_{t/+} \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_{t/+}^o} =$$

$$= B \cdot e_{t/+}^o \frac{P_t}{P_{t/+}} = D \cdot e_{t/+}^o \frac{P_t}{P_{t/+}} = P_{t/+} \frac{P_t}{P_{t/+}},$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$P_t = \frac{P_{f/-}}{e_{f/-}^o} e_{t,o}^o = P_{f/-} \frac{e_{t,o}^o}{e_{f/-}^o} = P_{f/-} \frac{B \cdot e_{t,o}^o}{B \cdot e_{f/-}^o} =$$

$$= P_{f/-} \frac{D \cdot e_{t,o}^o}{D \cdot e_{f/-}^o} =$$

$$= B \cdot e_{f/-}^o \frac{P_t}{P_{f/-}} = D \cdot e_{f/-}^o \frac{P_t}{P_{f/-}} = P_{f/-} \frac{P_t}{P_{f/-}},$$

$$P_f = B \cdot e_{f,o}^o = D \cdot e_{f,o}^o = \frac{P}{e_o^o} e_{f,o}^o = P \frac{e_{f,o}^o}{e_o^o} = P \frac{B \cdot e_{f,o}^o}{B \cdot e_o^o} = P \frac{D \cdot e_{f,o}^o}{D \cdot e_o^o} =$$

$$= B \cdot e_o^o \frac{P_f}{P} = D \cdot e_o^o \frac{P_f}{P} = P \frac{P_f}{P} =$$

$$= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{f,o}^o = P_g \frac{e_{f,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B \cdot e_{f,o}^o}{B \cdot e_{g,o}^o} = P_g \frac{D \cdot e_{f,o}^o}{D \cdot e_{g,o}^o} =$$

$$\begin{aligned}
&= B e_{g,o}^o \frac{P_f}{P_g} = D e_{g,o}^o \frac{P_f}{P_g} = P_g \frac{P_f}{P_g} = \\
&= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{f,o}^o = P_i \frac{e_{f,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{i,o}^o} = P_i \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{i,o}^o} = \\
&= B e_{i,o}^o \frac{P_f}{P_i} = D e_{i,o}^o \frac{P_f}{P_i} = P_i \frac{P_f}{P_i} = \\
&= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{f,o}^o = P_m \frac{e_{f,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{m,o}^o} = P_m \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{m,o}^o} = \\
&= B e_{m,o}^o \frac{P_f}{P_m} = D e_{m,o}^o \frac{P_f}{P_m} = P_m \frac{P_f}{P_m} = \\
&= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{f,o}^o = P_{sz} \frac{e_{f,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{sz,o}^o} = \\
&= B e_{sz,o}^o \frac{P_f}{P_{sz}} = D e_{sz,o}^o \frac{P_f}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_f}{P_{sz}} = \\
&= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{f,o}^o = P_t \frac{e_{f,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{t,o}^o} = P_t \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{t,o}^o} = \\
&= B e_{t,o}^o \frac{P_f}{P_t} = D e_{t,o}^o \frac{P_f}{P_t} = P_t \frac{P_f}{P_t} = \\
&= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{f,o}^o = P_f \frac{e_{f,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{f,o}^o} = P_f \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{f,o}^o} = \\
&= B e_{f,o}^o \frac{P_f}{P_f} = D e_{f,o}^o \frac{P_f}{P_f} = P_f \frac{P_f}{P_f} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+,o}^o} e_{f,o}^o = P_{t/+} \frac{e_{f,o}^o}{e_{t/+,o}^o} = P_{t/+} \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{t/+,o}^o} = \\
&= P_{t/+} \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{t/+,o}^o} = \\
&= B e_{t/+,o}^o \frac{P_f}{P_{t/+}} = D e_{t/+,o}^o \frac{P_f}{P_{t/+}} = P_{t/+} \frac{P_f}{P_{t/+}},
\end{aligned}$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_{f/-}}{e_{f/-,o}^o} e_{f,o}^o = P_{f/-} \frac{e_{f,o}^o}{e_{f/-,o}^o} = P_{f/-} \frac{B e_{f,o}^o}{B e_{f/-,o}^o} = \\
&= P_{f/-} \frac{D e_{f,o}^o}{D e_{f/-,o}^o} = \\
&= B e_{f/-,o}^o \frac{P_f}{P_{f/-}} = D e_{f/-,o}^o \frac{P_f}{P_{f/-}} = P_{f/-} \frac{P_f}{P_{f/-}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{t/+} &= B e_{t/+,o}^o = D e_{t/+,o}^o = \frac{P}{e_o^o} e_{t/+,o}^o = P \frac{e_{t/+,o}^o}{e_o^o} = \\
&= P \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_o^o} = P \frac{D e_{t/+,o}^o}{D e_o^o} = \\
&= B e_o^o \frac{P_{t/+}}{P} = D e_o^o \frac{P_{t/+}}{P} = P \frac{P_{t/+}}{P} = \\
&= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{t/+,o}^o = P_g \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_{g,o}^o} = P_g \frac{D e_{t/+,o}^o}{D e_{g,o}^o} =
\end{aligned}$$

$$= B e_{g,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_g} = D e_{g,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_g} = P_g \frac{P_{t/+}}{P_g} =$$

$$= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{t/+,o}^o = P_i \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_{i,o}^o} = P_i \frac{D e_{t/+,o}^o}{D e_{i,o}^o} =$$

$$= B e_{i,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_i} = D e_{i,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_i} = P_i \frac{P_{t/+}}{P_i} =$$

$$= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{t/+,o}^o = P_m \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_{m,o}^o} = P_m \frac{D e_{t/+,o}^o}{D e_{m,o}^o} =$$

$$= B e_{m,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_m} = D e_{m,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_m} = P_m \frac{P_{t/+}}{P_m} =$$

$$= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{t/+,o}^o = P_{sz} \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_{sz,o}^o} =$$

$$= P_{sz} \frac{D e_{t/+,o}^o}{D e_{sz,o}^o} =$$

$$= B e_{sz,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_{sz}} = D e_{sz,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_{t/+}}{P_{sz}} =$$

$$= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{t/+,o}^o = P_t \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_{t,o}^o} = P_t \frac{D e_{t/+,o}^o}{D e_{t,o}^o} =$$

$$= B e_{t,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_t} = D e_{t,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_t} = P_t \frac{P_{t/+}}{P_t} =$$

$$= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{t/+,o}^o = P_f \frac{e_{t/+,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B e_{t/+,o}^o}{B e_{f,o}^o} =$$

$$\begin{aligned}
&= P_f \frac{D e_{t/+/o}^o}{D e_{f,o}^o} = \\
&= B e_{f,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_f} = D e_{f,o}^o \frac{P_{t/+}}{P_f} = P_f \frac{P_{t/+}}{P_f} = \\
&= \frac{P_{t/+}}{e_{t/+/o}^o} e_{t/+/o}^o = P_{t/+} \frac{e_{t/+/o}^o}{e_{t/+/o}^o} = \\
&= P_{t/+} \frac{B e_{t/+/o}^o}{B e_{t/+/o}^o} = P_{t/+} \frac{D e_{t/+/o}^o}{D e_{t/+/o}^o} = \\
&= B e_{t/+/o}^o \frac{P_{t/+}}{P_{t/+}} = D e_{t/+/o}^o \frac{P_{t/+}}{P_{t/+}} = P_{t/+} \frac{P_{t/+}}{P_{t/+}} =
\end{aligned}$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$\begin{aligned}
P_{t/+} &= \frac{P_{f/-}}{e_{f/-/o}^o} e_{t/+/o}^o = P_{f/-} \frac{e_{t/+/o}^o}{e_{f/-/o}^o} = P_{f/-} \frac{B e_{t/+/o}^o}{B e_{f/-/o}^o} = \\
&= P_{f/-} \frac{D e_{t/+/o}^o}{D e_{f/-/o}^o} = \\
&= B e_{f/-/o}^o \frac{P_{t/+}}{P_{f/-}} = D e_{f/-/o}^o \frac{P_{t/+}}{P_{f/-}} = P_{f/-} \frac{P_{t/+}}{P_{f/-}} . \\
P_{f/-} &= B e_{f/-/o}^o = D_{f/-/o} = \frac{P}{e_o^o} e_{f/-/o}^o = P \frac{e_{f/-/o}^o}{e_o^o} = \\
&= P \frac{B e_{f/-/o}^o}{B e_o^o} = P \frac{D e_{f/-/o}^o}{D e_o^o} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B e_o^o \frac{P_{f/-/}}{P} = D e_o^o \frac{P_{f/-/}}{P} = P_{f/-/} \frac{P_{f/-/}}{P} = \\
&= \frac{P_g}{e_{g,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_g \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{g,o}^o} = P_g \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{g,o}^o} = \\
&= P_g \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{g,o}^o} = \\
&= B e_{g,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_g} = D e_{g,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_g} = P_g \frac{P_{f/-/}}{P_g} = \\
&= \frac{P_i}{e_{i,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_i \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{i,o}^o} = P_i \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{i,o}^o} = \\
&= P_i \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{i,o}^o} = \\
&= B e_{i,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_i} = D e_{i,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_i} = P_i \frac{P_{f/-/}}{P_i} = \\
&= \frac{P_m}{e_{m,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_m \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{m,o}^o} = P_m \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{m,o}^o} = \\
&= P_m \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{m,o}^o} = \\
&= B e_{m,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_m} = D e_{m,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_m} = P_m \frac{P_{f/-/}}{P_m} = \\
&= \frac{P_{sz}}{e_{sz,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_{sz} \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{sz,o}^o} = P_{sz} \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{sz,o}^o} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P_{sz} \frac{D e_{f/-/o}^o}{D e_{sz,o}^o} = \\
&= B e_{sz,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_{sz}} = D e_{sz,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{P_{f/-/}}{P_{sz}} = \\
&= \frac{P_t}{e_{t,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_t \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{t,o}^o} = P_t \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{t,o}^o} = \\
&= P_t \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{t,o}^o} = \\
&= B e_{t,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_t} = D e_{t,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_t} = P_t \frac{P_{f/-/}}{P_t} = \\
&= \frac{P_f}{e_{f,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_f \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{f,o}^o} = P_f \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{f,o}^o} = \\
&= P_f \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{f,o}^o} = \\
&= B e_{f,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_f} = D e_{f,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_f} = P_f \frac{P_{f/-/}}{P_f} = \\
&= \frac{P_{t/+/}}{e_{t/+/,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_{t/+/} \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{t/+/,o}^o} = P_{t/+/} \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{t/+/,o}^o} = \\
&= P_{t/+/} \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{t/+/,o}^o} = \\
&= B e_{t/+/,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_{t/+/}} = D e_{t/+/,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_{t/+/}} = P_{t/+/} \frac{P_{f/-/}}{P_{t/+/}} ,
\end{aligned}$$

illetve, ha a népesség évente többet fogyaszt, mint amennyit termel

$$\begin{aligned}
 P_{f/-/} &= \frac{P_{f/-/}}{e_{f/-/,o}^o} e_{f/-/,o}^o = P_{f/-/} \frac{e_{f/-/,o}^o}{e_{f/-/,o}^o} = P_{f/-/} \frac{B e_{f/-/,o}^o}{B e_{f/-/,o}^o} = \\
 &= P_{f/-/} \frac{D e_{f/-/,o}^o}{D e_{f/-/,o}^o} = \\
 &= B e_{f/-/,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_{f/-/}} = D e_{f/-/,o}^o \frac{P_{f/-/}}{P_{f/-/}} = P_{f/-/} \frac{P_{f/-/}}{P_{f/-/}} .
 \end{aligned}$$

A fentiekből kitűnik, hogy a szóban forgó stacionér népességben a születéskor várható átlagos élettartam nagyságát, vagyis a meghaltak átlagos életkorát nemcsak a népesség időben változatlan összlétszámának, illetve a népesség által egy év alatt leélt összes évek számának a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy a népesség időben változatlan összlétszámát, illetve a népesség által egy év alatt leélt összes évek számát megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned}
 e_o^o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} = \frac{P}{B} = \frac{P}{D} = P \frac{e_o^o}{P} = P \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\
 &= P \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\
 &= P \frac{e_{t+/o}^o}{P_{t+/}} , \text{ illetve ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit termel:} \\
 e_o^o &= P \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}} .
 \end{aligned}$$

Ennek alapján megállapítható, hogy az ilyen stacionér népesség nyers születési és halálozási arányszáma nem csupán a születések, illetve a halálozások időben változatlan és

egymással egyenlő számának és a népesség időben változatlan összlétszámának, illetve a népesség által egy év alatt leélt összes évek számának a hányadosaként (és a születéskor várható átlagos élettartam inverzeként) határozható meg, hanem a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyisége inverzének és egy év alatti összmenyiségük egy lakosra jutó hányadának a szorzataként is:

$$\begin{aligned}
 b = d &= \frac{B}{P} = \frac{D}{P} = \frac{1}{e_{o}^o} = \frac{1}{e_{g,o}^o} \cdot \frac{P_g}{P} = \frac{1}{e_{i,o}^o} \cdot \frac{P_i}{P} = \\
 &= \frac{1}{e_{m,o}^o} \cdot \frac{P_m}{P} = \frac{1}{e_{sz,o}^o} \cdot \frac{P_{sz}}{P} = \frac{1}{e_{t,o}^o} \cdot \frac{P_t}{P} = \frac{1}{e_{f,o}^o} \cdot \frac{P_f}{P} = \\
 &= \frac{1}{e_{t/+,o}^o} \cdot \frac{P_{t/+}}{P}, \text{ illetve, ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit termel:} \\
 b = d &= \frac{1}{e_{f/-,o}^o} \cdot \frac{P_{f/-}}{P}.
 \end{aligned}$$

Az ilyen stacionér népességben továbbá a születéskor várható átlagos gazdaságilag aktív élettartam nagyságát nemcsak a gazdaságilag aktív népesség időben változatlan összlétszámának, illetve a népesség által egy év alatt gazdaságilag aktív állapotban leélt évek számának a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy a gazdaságilag aktív népesség időben változatlan összlétszámát, illetve a népesség által egy év alatt gazdaságilag aktív állapotban leélt évek számát megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos összmenyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned}
 e_{g,o}^o &= \frac{P_g}{B} = \frac{P_g}{D} = P_g \frac{e_o^o}{P} = P_g \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_g \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\
 &= P_g \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_g \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_g \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_g \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\
 &= P_g \frac{e_{t/+,o}^o}{P_{t/+}}, \text{ illetve ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit termel:}
 \end{aligned}$$

$$e_{g,o}^o = P_g \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}}.$$

Az ilyen stacionér népességben továbbá a születéskor várható átlagos gazdaságilag inaktív élettartam nagyságát nemcsak a gazdaságilag inaktív népesség időben változatlan összlétszámának, illetve a népesség által egy év alatt gazdaságilag inaktív állapotban leélt évek számának a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy a gazdaságilag inaktív népesség időben változatlan összlétszámát, illetve a népesség által egy év alatt gazdaságilag inaktív állapotban leélt évek számát megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned} e_{i,o}^o &= \frac{P_i}{B} = \frac{P_i}{D} = P_i \frac{e_o^o}{P} = P_i \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_i \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\ &= P_i \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_i \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_i \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_i \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\ &= P_i \frac{e_{t/+/,o}^o}{P_{t/+/}}, \text{ illetve ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit termel:} \\ e_{i,o}^o &= P_i \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}}. \end{aligned}$$

Továbbá: az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos munkaidő nagyságát nemcsak az un. mindig dolgozó stacionér népesség időben változatlan összlétszámának, illetve a népesség által egy év alatt ledolgozott munkaidő-évek számának a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy az un. mindig dolgozó stacionér népesség időben változatlan összlétszámát, illetve a népesség által egy év alatt ledolgozott munkaidő-évek számát megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$e_{m,o}^o = \frac{P_m}{B} = \frac{P_m}{D} = P_m \frac{e_o^o}{P} = P_m \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_m \frac{e_{i,o}^o}{P_i} =$$

$$= P_m \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_m \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_m \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_m \frac{e_{f,o}^o}{P_f} =$$

$$= P_m \frac{e_{t/+/,o}^o}{P_{t/+/}}, \text{ illetve, ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit termel:}$$

$$e_{m,o}^o = P_m \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}}.$$

Az ilyen stacionér népességben továbbá a születéskor várható átlagos nem-munkaidő (szabadidő) nagyságát nemcsak az un. sosem dolgozó stacionér népesség időben változatlan összlétszámának, illetve a népesség által egy év alatt nem-munkaidőként (szabadidőként) leélt évek számának a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy az un. sosem dolgozó stacionér népesség időben változatlan összlétszámát, illetve a népesség által egy év alatt nem-munkaidőként (szabadidőként) leélt évek számát megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$e_{sz,o}^o = \frac{P_{sz}}{B} = \frac{P_{sz}}{D} = P_{sz} \frac{e_o^o}{P} = P_{sz} \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_{sz} \frac{e_{i,o}^o}{P_i} =$$

$$= P_{sz} \cdot \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_{sz} \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_{sz} \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_{sz} \frac{e_{f,o}^o}{P_f} =$$

$$= P_{sz} \frac{e_{t/+/,o}^o}{P_{t/+/}}, \text{ illetve, ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit}$$

termel:

$$e_{sz,o}^o = P_{sz} \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}}.$$

Továbbá az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos termelés nagyságát nemcsak az évi termelés időben változatlan összmenyiségének a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy az évi termelés időben változatlan összmenyiségét megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek szá-

mához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenységéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned}
 e_{t,o}^o &= \frac{P_t}{B} = \frac{P_t}{D} = P_t \frac{e_o^o}{P} = P_t \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_t \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\
 &= P_t \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_t \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_t \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_t \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\
 &= P_t \frac{e_{t/+/,o}^o}{P_{t/+/}}, \text{ illetve, ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit}
 \end{aligned}$$

termel:

$$e_{t,o}^o = P_t \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}}.$$

Az ilyen stacionér népességben továbbá a születéskor várható átlagos fogyasztás nagyságát nemcsak az évi fogyasztás időben változatlan összmenységének a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy az évi fogyasztás időben változatlan összmenységét megszorozzuk az átlagos élettartamnak a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenységéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned}
 e_{f,o}^o &= \frac{P_f}{B} = \frac{P_f}{D} = P_f \frac{e_o^o}{P} = P_f \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_f \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\
 &= P_f \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_f \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_f \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_f \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\
 &= P_f \frac{e_{t/+/,o}^o}{P_{t/+/}}, \text{ illetve, ha a népesség többet fogyaszt, mint amennyit}
 \end{aligned}$$

termel:

$$e_{f,o}^o = P_f \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}}.$$

Továbbá: az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos termelési többlet nagyságát nem csupán az évi termelési többlet időben változatlan összmenyiségének a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy az évi termelési többlet időben változatlan összmenyiségét megszorozzuk az átlagos élettartammal a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned}
 e_{t/+/,o}^o &= \frac{P_{t/+/}}{B} = \frac{P_{t/+/}}{D} = P_{t/+/} \frac{e_o^o}{P} = P_{t/+/} \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_{g/+/} \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\
 &= P_{t/+/} \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_{t/+/} \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_{t/+/} \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_{t/+/} \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\
 &= P_{t/+/} \frac{e_{t,+/,o}^o}{P_{t/+/}} .
 \end{aligned}$$

Amennyiben viszont a népesség többet fogyaszt, mint amennyit termel, az ilyen stacionér népességben a születéskor várható átlagos fogyasztási többlet nagyságát nem csupán az évi fogyasztási többlet időben változatlan összmenyiségének a születések, illetve a halálozások időben változatlan és egymással egyenlő számával való elosztása útján számíthatjuk ki, hanem úgy is, hogy az évi fogyasztási többlet időben változatlan összmenyiségét megszorozzuk az átlagos élettartammal a népesség által egy év alatt leélt összes évek számához viszonyított arányával, illetve a gazdasági jelenségek élettartam alatti átlagos mennyiségének egy év alatti összmenyiségéhez viszonyított arányával:

$$\begin{aligned}
 e_{f/-/,o}^o &= \frac{P_{f/-/}}{B} = \frac{P_{f/-/}}{D} = P_{f/-/} \frac{e_o^o}{P} = P_{f/-/} \frac{e_{g,o}^o}{P_g} = P_{f/-/} \frac{e_{i,o}^o}{P_i} = \\
 &= P_{f/-/} \frac{e_{m,o}^o}{P_m} = P_{f/-/} \frac{e_{sz,o}^o}{P_{sz}} = P_{f/-/} \frac{e_{t,o}^o}{P_t} = P_{f/-/} \frac{e_{f,o}^o}{P_f} = \\
 &= P_{f/-/} \frac{e_{f/-/,o}^o}{P_{f/-/}} .
 \end{aligned}$$

4. A stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzői az un. gazdasági halandósági táblák stacionér népességében és az élveszületések, illetve a halálozások tetszőleges számának az alapulvételével becsült stacionér népességben kimutatható főbb összefüggések kapcsolata

A valamely tetszőleges B születésszámu, ill. D halálozási számu stacionér népesség által produkált gazdasági jelenségek összmenyiségei a legkülönbözőbb meghatározások alapján vizsgálva is szintén $B/l_0 = D : \sum_{x=0}^{\omega} d_x$ arányban térnek el az $l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x$ - gyökü gazdasági halandósági táblákétól. Valamely tetszőleges B születésszámu, ill. D halálozási számu stacionér népesség által produkált gazdasági jelenségnek az összmenyiségei tehát - a megfelelő gazdasági halandósági táblák birtokában - nemcsak az élveszületések, ill. a halálozások évi számának és születéskor várható átlagos volumeneinek a szorzataként határozhatók meg, hanem többek közt az alábbi formulák szerint is:

$$P_{\text{gazd.}} = B \cdot \frac{T_{\text{gazd., o}}}{l_0} = D \cdot \frac{T_{\text{gazd., o}}}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = T_{\text{gazd., o}} \frac{B}{l_0} =$$

$$= T_{\text{gazd., o}} \frac{D}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}.$$

vagyis úgy is, hogy megfelelő gazdasági halandósági táblák stacionér népessége által produkált gazdasági jelenségek összmenyiségét megszorozzuk az élveszületések, ill. a halálozások szóban forgó tetszőleges számának és a tábla gyökének a hányadosával, továbbá:

$$P_{\text{gazd.}} = B \sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_{\text{gazd., x}}}{l_0} = D \sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_{\text{gazd., x}}}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{B}{l_0} \sum_{x=0}^{\omega} L_{\text{gazd., x}} =$$

$$= \frac{D}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} \sum_{x=0}^{\omega} L_{\text{gazd., x}},$$

tehát - mint látható - úgy is, hogy a megfelelő gazdasági halandósági tábla stacionér népessége által az egyes korévekben (ill. korcsoportokban) produkált gazdasági jelenségek minden korcsoportra kiterjedő összegét megszorozzuk a születések, ill. halálozások szóban forgó tetszőleges számával; úgy is, hogy a gazdasági halandósági tábla stacionér népessége gaz-

dasági korfáinak az összegét megszorozzuk az élveszületések, ill. a halálozások kívánt tetszőleges számának és a tábla gyökének a hányadosával. Továbbá:

$$P_{\text{gazd.}} = \frac{B}{\frac{1}{e_{\text{gazd., o}}^o}} = \frac{D}{\frac{1}{e_{\text{gazd., o}}^o}},$$

tehát úgy is, hogy az élveszületések tetszőleges számát, ill. a halálozások ez utóbbival azonos számát elosztjuk a gazdasági jelenségek születéskor várható átlagos nagyságai a megfelelő gazdasági halandósági táblákból ismert értékeinek a reciprokával. Továbbá:

$$P_{\text{gazd.}} = \frac{T_{\text{gazd., o}}}{T_o} \cdot B \cdot e_o^o = \frac{T_{\text{gazd., o}}}{T_o} \cdot B \cdot e_o^o = \frac{T_{\text{gazd., o}}}{T_o} \cdot P,$$

tehát úgy is, hogy a megfelelő gazdasági halandósági tábla stacionér népessége által produkált gazdasági jelenségek egy főre jutó mennyiségét megszorozzuk az élveszületések, ill. halálozások tetszőleges számán alapuló stacionér népességszámmal. Továbbá:

$$P_{\text{gazd.}} = \frac{e_{\text{gazd., o}}^o}{e_o^o} \cdot B \cdot e_o^o = \frac{e_{\text{gazd., o}}^o}{e_o^o} \cdot D \cdot e_o^o = \frac{e_{\text{gazd., o}}^o}{e_o^o} \cdot P,$$

tehát úgy is, hogy a gazdasági jelenségek születéskor várható mennyiségének az átlagos élettartam egy évre jutó hányadát - azaz az átlagos élettartam egy évének a vonatkozó gazdasági jelenségekben kifejezett árát - megszorozzuk az élveszületések kiválasztott B számán, ill. a halálozások ez utóbbival azonos D számán alapuló népességszámmal; továbbá:

$$\begin{aligned} P_{\text{gazd., } \alpha} &= \frac{e_{\text{gazd., } \alpha, o}^o}{e_{\text{gazd., } \beta, o}^o} \cdot \frac{e_{\text{gazd., } \beta, o}^o}{e_o^o} \cdot B \cdot e_o^o = \\ &= \frac{e_{\text{gazd., } \alpha, o}^o}{e_{\text{gazd., } \beta, o}^o} \cdot \frac{e_{\text{gazd., } \beta, o}^o}{e_o^o} \cdot D \cdot e_o^o = \\ &= \frac{e_{\text{gazd., } \alpha, o}^o}{e_{\text{gazd., } \beta, o}^o} \cdot \frac{e_{\text{gazd., } \beta, o}^o}{e_o^o} \cdot P, \end{aligned}$$

vagyis valamely gazdasági jelenségnek az élveszületések B számán, ill. a halálozások D számán alapuló stacionér korfája a vonatkozó gazdasági jelenségek születéskor várható átlagos volumene, és valamely gazdasági jelenség születéskor várható átlagos volumene közötti arány és a gazdasági jelenség születéskor várható átlagos nagysága ismeretében a jelzett arálynak az átlagos élettartam egy éve gazdasági jelenségben kifejezett árával és a B

születésszámon, ill. D halálozási számon alapuló stacionér népességszámmal való megszorítása útján is kialakítható stb.

A stacionér népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatoknak a fenti elemzése korántsem tekinthető kimerítő jellegűnek. Néhány további összefüggésre értekezésünk következő fejezete, valamint a gazdasági jelenségek és a népesedési jelenségek reprodukciója közötti kapcsolatoknak a vizsgálatával foglalkozó negyedik fejezete derít fényt, ez utóbbi természetesen már nemcsak a stacionér állapotban fennálló relációknak az elemzésére terjed ki (6, 11, 29, 67).

Értekezésünk e fejezetében a stacionér népesség kialakulása feltételeinek és a stacionerrá váló népesség számával kapcsolatos kérdéseknek a rövid vizsgálata után a stacionér populációk és szubpopulációk demográfiai jellemzői, valamint a stacionér populációk demográfiai és gazdasági jellemzői közötti főbb kapcsolatokat tekintettük át azonos elemzési elvek és módszerek, valamint azonos szerkezeti felépítés alapulvételével. A 2., 3. és 4. pontban vázolt összefüggések száma természetesen még ama egyszerűsítő feltételezés érvényben tartása mellett is jelentősen szaporítható lenne, hogy az össznépességen belül a különféle szubpopulációk, illetve legalább bizonyos szubpopulációk is stacionérek, továbbá, hogy a stacionér népesség gazdasági élete is stacionér. A stacionér népesség létszámára, az élveszületések és a halálozások stacionér népességen belüli számára, a stacionér népesség nyers születési és halálozási arányszámára, a születéskor várható átlagos élettartamra stb. vonatkozó új meghatározások, új formulák e feltételezések érvényben tartása esetén például ama egyszerű meggondolás alapján is összekapcsolhatók lennének egymással, hogy ugyanazon mutatók különféle, egyaránt korrekt meghatározásai egymással is egyenlők. Az ugyanazon mutatók különféle meghatározásai egyenlővé tétele alapján a stacionér populációk és szubpopulációk, valamint a stacionér gazdálkodást folytató stacionér népesség különféle tulajdonságainak interdependenciája a felírt egyenlőségek viszonylag egyszerű algebrai átalakításai és az ezen átalakítások során kapott új összefüggések tartalmi elemzése útján is jelentősen szaporítható lenne. Anélkül azonban, hogy az elemzés folytatása eme útjának a járhatóságát és jelentőségét kétségbe vonnánk, a következő fejezetben a szóbanforgó összefüggések számát egy, az eddigiek során csupán jelzett, de el nem mélyített szemléleti módból kiindulva fogjuk megkísérelni gyarapítani.

III. A STACIONÉR POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK DEMOGRÁFIAI JELLEMZŐI, VALAMINT DEMOGRÁFIAI ÉS GAZDASÁGI JELLEMZŐI KÖZÖTT FENNÁLLÓ KAPCSOLATOK KÖRÉNEK KIBŐVÍTÉSE A MÁR LEÉLT ÉS A MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁNAK EGYENLŐSÉGÉRE VONATKOZÓ TÉTEL ALAPJÁN

1. A stacionér népesség ismert tulajdonságai kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározásának matematikai megfogalmazása

A stabil népesség, és ezen belül a stacionér népesség longitudinális, vagyis kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározásával, pontosabban: a transzverzális szemléleti mód alapján definiált ismert tulajdonságainak a longitudinális szemléleti mód alapján definiálható tulajdonságaiból való származtatásával röviden már értekezésünk első fejezetében is foglalkoztunk. Értekezésünk e harmadik fejezetét a népességtudományban egyre inkább teret hódító longitudinális szemléleti mód elvi-módszertani alapjainak elmélyítésével és a stacionér népesség ismert tulajdonságai kohorsz-szemlélet alapján történő, az első fejezetben csupán szóbelileg kifejtett meghatározásának matematikai leírásával fogjuk kezdeni.

Ismeretes, hogy az össznépesség, illetve valamely szubpopuláció egy időpontban megfigyelhető száma felfogható a megfigyelés időpontját megelőző félév alatt, és a megfigyelés időpontját követő félév alatt (vagyis összesen egy év alatt) a népesség által leélt évek számaként is. Más szavakkal: az össznépesség valamely időszak közepén megfigyelhető számának mutatója nemcsak magát az össznépesség számát, hanem az össznépesség által a vonatkozó időszak egy éve alatt leélt összes évek számát, vagyis években kifejezve a népesség által a vonatkozó időszak alatt leélt összes időt is mutatja. (Amennyiben a vonatkozó időszak egy évnél hosszabb, vagy rövidebb - az össznépesség időszakközepi száma annyiszorosát jelenti az általa a vonatkozó időszak alatt leélt évek számának, ahányszor a vonatkozó időszak hossza az egy évben benne foglaltatik.) A különböző szubpopulációk (pl. a nőtlen, illetve hajadon családi állapotúak szubpopulációja) időszakközepi számai hasonló módon a vonatkozó szubpopulációkhoz (pl. a nőtlen, illetve hajadon családi állapotúakhoz) tartozás állapotában leélt évek számát is mutatják. Továbbá: a különböző korévek (korcsoportok) nőtlen, illetve hajadon családi állapotú népességének időszakközepi száma a nőtlen, illetve hajadon családi állapothoz tartozás, és a különböző korévekhez (korcsoportokhoz) tartozás ál-

lapotában leélt idő években kifejezett nagyságát is mutatja stb.* Ezeknél a demográfusok által jól ismert megállapításoknál témánk egyöntetű, szisztematikus tárgyalása szempontjából talán még fontosabb, hogy e megállapítások fordítottja is igaz, vagyis, hogy az össznépesség, illetve valamely szubpopuláció által egy év alatt, illetve valamely időszak egy éve alatt leélt idő években kifejezett nagysága egyben az össznépesség, illetve a vonatkozó szubpopuláció időszakközepi számaként is felfogható. A fentiek alapján jogosultnak, és a transzverzális és longitudinális elemzés közötti kapcsolatok egyöntetűbb, szisztematikusabb, s ezáltal elmélyültebb vizsgálata lehetőségének biztosítása érdekében célszerűnek is tűnik, hogy a népmozgalmi jelenségek hagyományos körét egy újabb népmozgalmi jelenséggel, méghozzá természetes népmozgalmi jelenséggel: életünk élésének, vagyis magának az életnek a jelenségével, és az ennek megfelelő természetes népmozgalmi eseménnyel: a népesség által összesen leélt idő, illetve a különböző specifikus esetekhez tartozás állapotában leélt idő eseményével egészítsük ki.

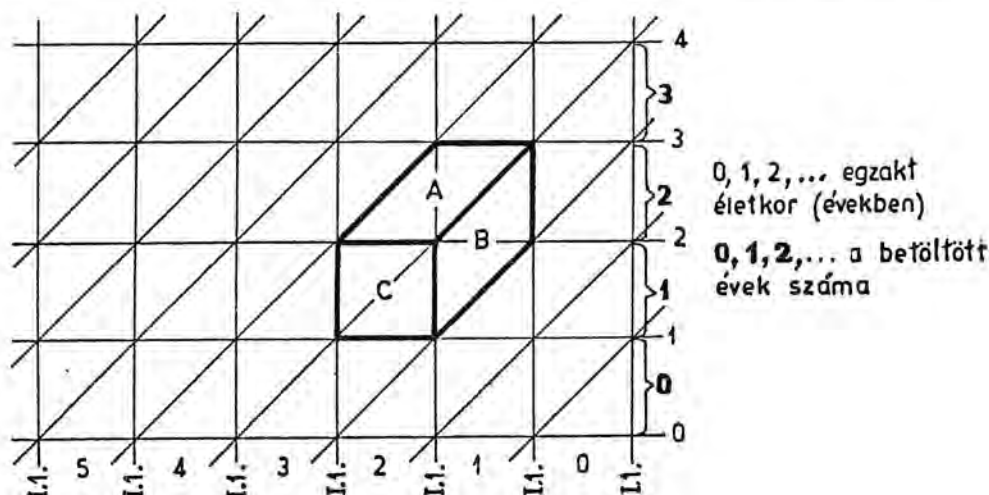
A népesség által összesen leélt idő, illetve a különböző specifikus esetekhez tartozás állapotában leélt idő a többi népmozgalmi eseményhez hasonlóan a Wilhelm Lexis-től származó ún. demográfiai hálózatban is ábrázolható. A III. 1. ábra a hálózat egy módosított változatának** felhasználásával mutatja be az összesen leélt évek számának, illetve a különböző specifikus esetekhez tartozás állapotában leélt évek számának a többi népmozgalmi esemény vonatkozó sokaságaival analóg módon kialakítható ún. három fő sokaságát. Az A paralelogrammában található az ugyanazon kohorsz által ugyanabban az életkorban, de két különböző (szomszédos) naptári év alatt leélt évek száma; a B paralelogrammában az ugyanazon kohorsz által, de két különböző (szomszédos) életkorban, ugyanazon naptári év alatt leélt évek száma, és a C paralelogrammában található a két különböző (szomszédos) kohorsz által ugyanabban az életkorban és ugyanabban a naptári évben leélt évek száma. A leélt éveknek ez a száma, melyet a vonatkozó, vagyis ábránkon a 4. naptári évi születési évjárat az A paralelogrammában leélt, közelítőleg egyenlő az élők ama fő sokaságának számával, akiknek életvonalai az A paralelogrammán függőlegesen áthaladó egyenes szakaszt átszelik. Ez utóbbi viszont közelítőleg az 1. naptári év január 1-én betöltött éveik

* A népesség, illetve valamely szubpopuláció által a vonatkozó időszak alatt leélt összes idő természetesen éveken kívül más mértékegységekben (hónap, hét, óra stb.) is kifejezhető. Ebben az esetben az össznépesség, illetve a vonatkozó szubpopuláció időszakközepi száma nem mutatja közvetlenül a vonatkozó időszak egy éve alatt leélt összes idő nagyságát is.

** A hálózat e módosított változatában - mint látható - az egyes kohorszokat a hálózat vízszintes tengelyével 45° -os szöget bezáró egyenes szakaszok, az egyes naptári éveket pedig a hálózat függőleges tengelyével párhuzamos egyenes szakaszok határolják el egymástól. A hálózat e módosított változatának a hagyományos változattal való egybevetését lásd ezen értekezés szerzője "Gazdaságdemográfiai módszerek" c. egyetemi jegyzetének I. fejezetében (11), a "Demográfia" 1974. évi 1. számában megjelent tanulmányában (47), valamint "A gazdaságdemográfiai elemzés elvei és módszerei" c. egyetemi jegyzetének I. fejezetében (29).

száma alapján 2 évesek számával egyenlő, és szintén közelítőleg egyenlő az 1. naptári év január elsejét megelőző fél év alatt leélt évek számával is. Annak, hogy csak közelítőleg egyenlő, egyik oka, hogy eme egy évnyi, a C típus parallelogrammához hasonló módon szimbolizálható, nem január 1-től január 1-ig tartó egy évnyi periódusba az 5. naptári évi születési évjárat és a 3. naptári évi születési évjárat által leélt évek számának egy része is belekerülne, (lásd a III. 2. ábrán a vízszintesen vonalkázott részeket) a 4. naptári évi születési kohorsz által leélt évek egy része viszont nem foglaltatna benne. (Lásd a III. 2. ábrán a függőlegesen vonalkázott részeket.)

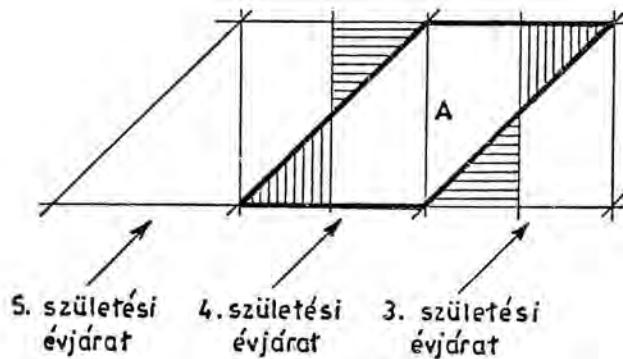
III. 1. A LEÉLT ÉVEK HÁROM FŐ SOKASÁGÁNAK ÁBRÁZOLÁSA A DEMOGRÁFIA HÁLÓZAT MÓDOSÍTOTT VÁLTOZATÁBAN



A leélt éveknek ez a száma, melyet a vonatkozó, vagyis ábránkon a 3 naptári évi születési évjárat a B parallelogrammában leél, az 1 éves és a 2 éves állapotban leélt évekre oszlik meg, és közelítőleg egyenlő az élők ama fő sokaságának számával, akiknek életvonalai a B parallelogrammán vízszintesen áthaladó egyenes szakaszt átszelik. Ez utóbbi - mint ismeretes - az élők ama fő sokaságának számával egyenlő, akik az 1. naptári év alatt 2 éves egzakt életkorukat elérik.

Az egyszerűség és rövidegség kedvéért maradjunk az A és a B parallelogrammáknál. A transzverzális és longitudinális elemzés közötti kapcsolatok vizsgálata szempontjából egyszerűbb lenne, ha ezek közül is a B parallelogrammát választanánk ki. A leélt éveknek a parallelogrammákban lévő száma zárt népességben felfogható lenne a vonatkozó születési évjárat által leélt összes évek száma és ezen évek a vonatkozó (január 1-től január 1-ig terjedő) naptári évre jutó hányada szorzataként. Az A parallelogramma kiválasztása esetén a leélt évek benne foglalt száma, s a fentiek értelmében a népességből a vonatkozó január 1-én betöltött éveik száma alapján 2 évesek száma zárt népességben felfogható lenne a vonatkozó születési évjárat által leélt összes évek száma és ezen évek a vonatkozó életkorra

(s egyben a vonatkozó, nem január 1-től január 1-ig terjedő naptári évnvi periódusra) jutó hányada szorzataként.



A III. 3. ábrán a 0, az 1, a 2 és az i a különböző születési évjáratokat (generációkat) jelzik. A $T_{0,0}$, $T_{0,1}$, $T_{0,2}$, ..., $T_{0,i}$ szimbólumok az egyes születési évjáratok (generációk) által összesen leélt évek számát mutatják. Az első indexként szereplő 0-k azt jelzik, hogy az évek ezen számai az egyes születési évjáratok (generációk) által születéstől leélt összes évek számaiként is felfoghatók. A második index a születési évjáratot (generációt) jelenti. Az indexekkel ellátott α -k jelzik az összesen leélt évek számának naptári évek szerinti (B paralelogramma választása esetén), illetve életkor szerint (A paralelogramma választása esetén) megoszlását (naptárát). Az α -k első indexe a naptári évet (B paralelogramma választása esetén), illetve az életkort (A paralelogramma választása esetén), második indexe pedig a születési évjáratot (generációt) jelenti. A naptár ezen elemeinek longitudinális összege minden születési kohorsz (generáció) esetében egyenlő 1-gyel:

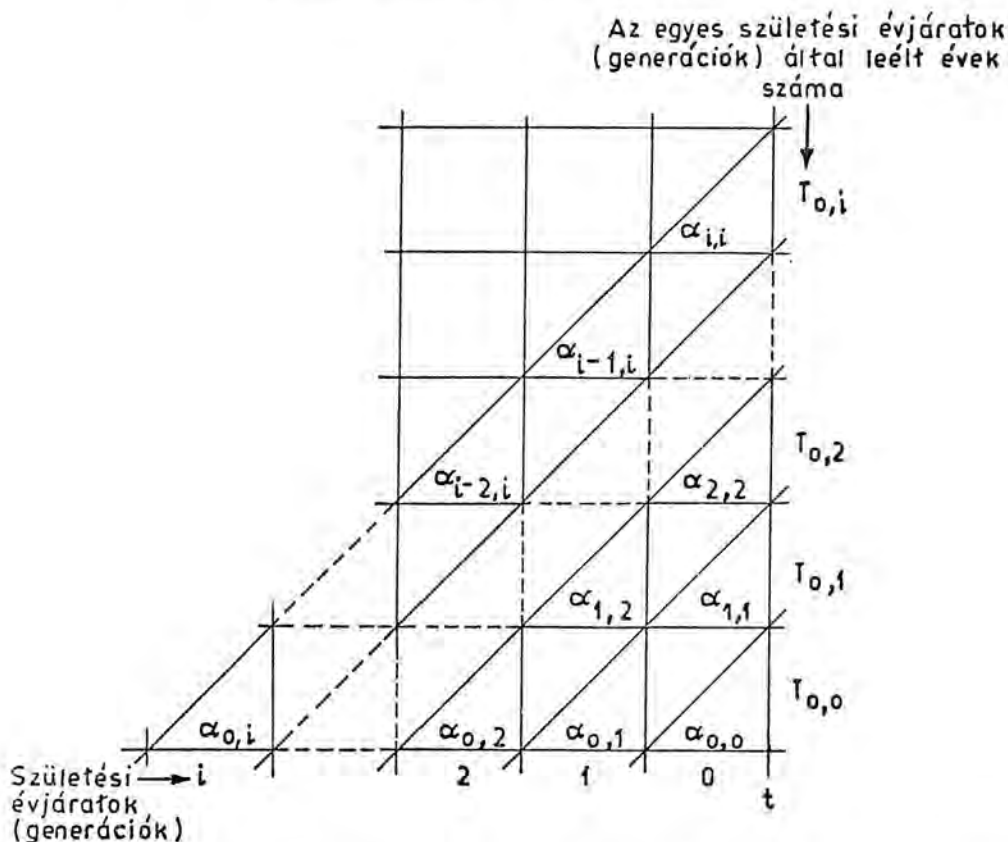
$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{x,i} = 1.$$

A B paralelogramma választása esetén a leélt évek összes száma (P) a 0-val jelzett naptári évben:

$$\begin{aligned} P &= T_{0,0} \alpha_{0,0} + T_{0,1} \alpha_{1,1} + T_{0,2} \alpha_{2,2} + \dots + T_{0,i} \alpha_{i,i} + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\omega} T_{0,i} \alpha_i, \end{aligned}$$

ami egyben az évközépi népesség közelítő pontosságú számaként is felfogható.

III. 3. A LEÉLT ÉVEK SZÁMA ÉS NAPTÁRA A KÜLÖNBÖZŐ SZÜLETÉSI ÉVJÁRATOKBAN (GENERÁCIÓKBAN)



Az A típusú parallelogramma választása esetén a leélt évek összes száma (P_t) a $\hat{0}$ -val jelzett naptári év közepétől a következő naptári év közepéig:

$$P_t = T_{0,0} \alpha_{0,0} + T_{0,1} \alpha_{1,1} + T_{0,2} \alpha_{2,2} + \dots + T_{0,i} \alpha_{i,i} + \dots =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} T_{0,i} \alpha_i ;$$

ami egyben a 0-val jelzett naptári év végén, illetve a következő naptári év elején, vagyis a t időpontban megfigyelhető népesség közelítő számaként is felfogható.

$P \neq P_t$, mert az α -k első indexe - mint jeleztük - A parallelogramma választása esetén az életkort, B parallelogramma választása esetén a naptári évet jelenti.

Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban csupán az A parallelogramma felhasználásán alapuló alábbi megállapításokra szorítkoztunk:

- A népesség száma a megfigyelés t -vel jelzett időpontjában (P_t) a betöltött éveik száma alapján 0-évesek ($P_{0,0}$), egy évesek ($P_{1,1}$), két évesek ($P_{2,2}$), ... i -évesek ($P_{i,i}$) számából tevődik össze:

$$P_t = P_{0,0} + P_{1,1} + P_{2,2} + \dots + P_{i,i} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$$

ahol a P -k első indexe az életkort, második indexe pedig azt a születési évjáratot (generációt) jelzi, melyhez a vonatkozó koruak tartoznak.

A különböző koruak t -időpontbeli száma a fentiek alapján:

$$P_{0,0} = T_{0,0} \alpha_{0,0}$$

$$P_{1,1} = T_{0,1} \alpha_{1,1}$$

$$P_{2,2} = T_{0,2} \alpha_{2,2}$$

.

.

.

$$P_{i,i} = T_{0,i} \alpha_{i,i}$$

.

.

.

A különböző koruak t -időpontbeli száma zárt népességben azonban a vonatkozó születési évjáratok (generációk) születéskori számának és a különböző naptári években születettek t -időpontig való továbbélése valószínűségeinek függvényeként is meghatározható. Amennyiben a megfigyelés időpontját megelőző (0-val jelzett) naptári év alatt születetteknek ($B_{0,0}$) a megfigyelés időpontjáig való továbbélési valószínűségét az $r_{0,0}^P$ szimbólummal, az 1-gyel jelzett naptári év alatt születettek ($B_{0,1}$) a megfigyelés időpontjáig való továbbélési valószínűségét az $r_{1,1}^P$ szimbólummal, stb. jelöljük (III.4. ábra), a különböző koruak t -időpontbeli számát a megfelelő születésszámok és továbbélési valószínűségek alábbi szorzatai formájában írhatjuk fel:

$$P_{0,0} = B_{0,0} r_{0,0}^P$$

$$P_{1,1} = B_{0,1} r_{1,1}^P$$

$$P_{2,2} = B_{0,2} r_{2,2}^P$$

.

.

.

$$P_{i,i} = B_{0,i} r_{i,i}^P$$

.

.

.

vagyis

$$T_{o,o} \alpha_{o,o} = B_{o,o} r_{o,o}^p = P_{o,o}$$

$$T_{o,1} \alpha_{1,1} = B_{o,1} r_{1,1}^p = P_{1,1}$$

$$T_{o,2} \alpha_{2,2} = B_{o,2} r_{2,2}^p = P_{2,2}$$

.

.

.

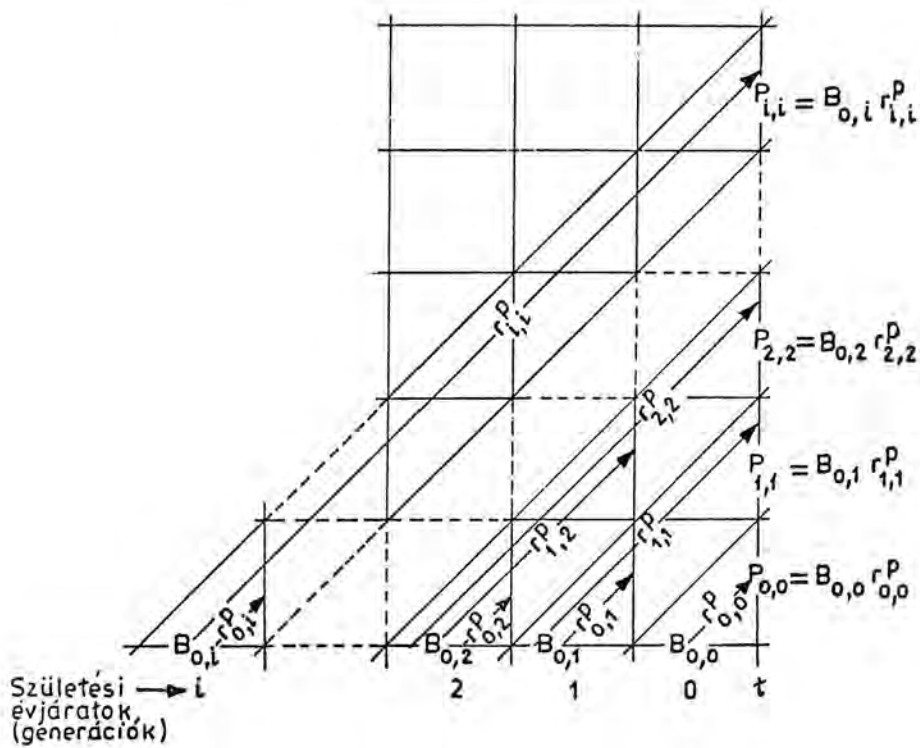
$$T_{o,i} \alpha_{i,i} = B_{o,i} r_{i,i}^p = P_{i,i}$$

.

.

.

III. 4. ZÁRT NÉPESSÉG KIALAKULÁSÁNAK BŐVÍTETT SÉMÁJA



ahonnan

$$T_{o,o} = \frac{P_{o,o}}{\alpha_{o,o}} = \frac{B_{o,o} r_{o,o}^p}{\alpha_{o,o}}$$

$$T_{o,1} = \frac{P_{1,1}}{\alpha_{1,1}} = \frac{B_{o,1} r_{1,1}^p}{\alpha_{1,1}}$$

$$T_{o,2} = \frac{P_{2,2}}{\alpha_{2,2}} = \frac{B_{o,2} r_{2,2}^p}{\alpha_{2,2}}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$T_{o,i} = \frac{P_{i,i}}{\alpha_{i,i}} = \frac{B_{o,i} r_{i,i}^p}{\alpha_{i,i}}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

vagyis

$$\alpha_{o,o} = \frac{P_{o,o}}{T_{o,o}} = \frac{B_{o,o} r_{o,o}^p}{T_{o,o}}$$

$$\alpha_{1,1} = \frac{P_{1,1}}{T_{o,1}} = \frac{B_{o,1} r_{1,1}^p}{T_{o,1}}$$

$$\alpha_{2,2} = \frac{P_{2,2}}{T_{o,2}} = \frac{B_{o,2} r_{2,2}^p}{T_{o,2}}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\alpha_{i,i} = \frac{P_{i,i}}{T_{o,i}} = \frac{B_{o,i} r_{i,i}^p}{T_{o,i}}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

továbbá

$$B_{o,o} = \frac{P_{o,o}}{r_{o,o}^p} = \frac{T_{o,o} \alpha_{o,o}}{r_{o,o}^p}$$

$$B_{o,1} = \frac{P_{1,1}}{r_{1,1}^p} = \frac{T_{o,1} \alpha_{1,1}}{r_{1,1}^p}$$

$$B_{o,2} = \frac{P_{2,2}}{r_{2,2}^p} = \frac{T_{o,2} \alpha_{2,2}}{r_{2,2}^p}$$

$$\begin{array}{c}
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
B_{o,i} = \frac{P_{i,i}}{r_{i,i}^p} = \frac{T_{o,i} \alpha_{i,i}}{r_{i,i}^p} \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot
\end{array}$$

és

$$\begin{array}{c}
r_{o,o}^p = \frac{P_{o,o}}{B_{o,o}} = \frac{T_{o,o} \alpha_{o,o}}{B_{o,o}} \\
r_{1,1}^p = \frac{P_{1,1}}{B_{o,1}} = \frac{T_{o,1} \alpha_{1,1}}{B_{o,1}} \\
r_{2,2}^p = \frac{P_{2,2}}{B_{o,2}} = \frac{T_{o,2} \alpha_{2,2}}{B_{o,2}} \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
r_{i,i}^o = \frac{P_{i,i}}{B_{o,i}} = \frac{T_{o,i} \alpha_{i,i}}{B_{o,i}} \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot \\
\cdot \quad \cdot
\end{array}$$

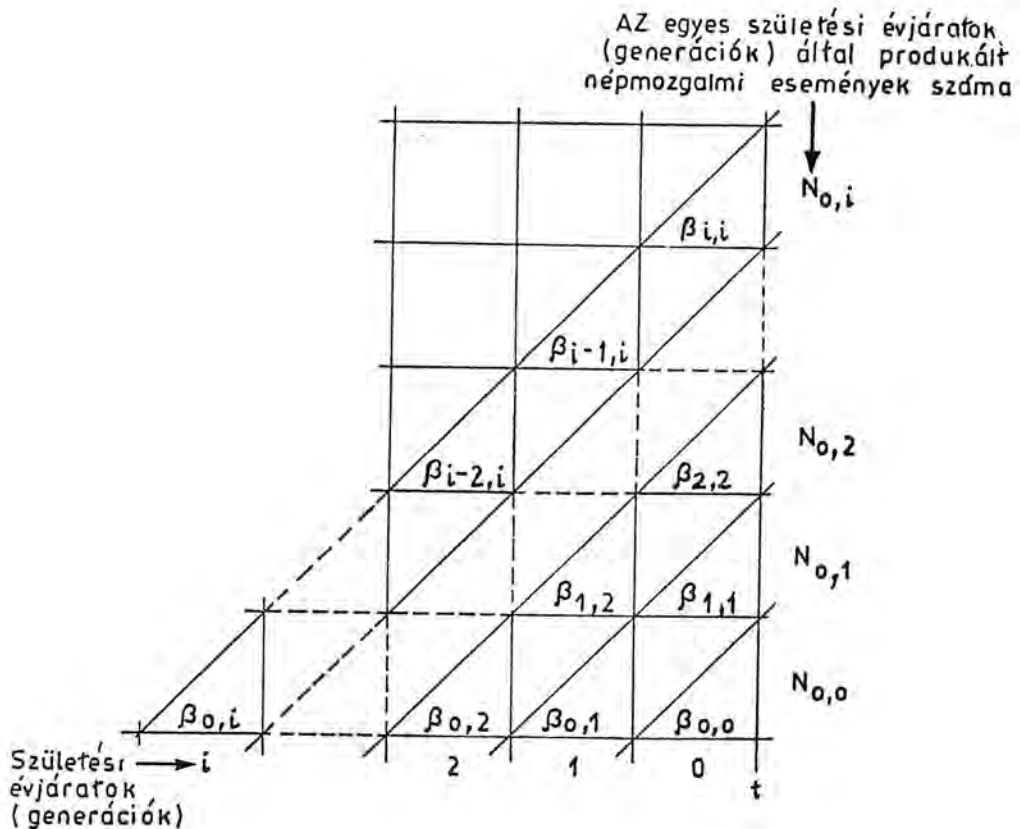
A leélt évek számához hasonlóan ábrázolható a demográfiai hálózatban az összes természetes népmozgalmi események és vándormozgalmi események un. három fő sokasága is (III. 5. ábra). Hasonló az egyes paralelogrammákban foglalt eseményeknek a transzverzális és a longitudinális elemzés összekapcsolása szempontjából való értékelése is. Továbbra is az A paralelogrammánál maradva jelentse valamely népmozgalmi eseménynek a 0, 1, 2, ... i születési évjáratok által produkált összes számát, illetve születéskor várható összmenyiségét $N_{o,o}$ $N_{o,1}$ $N_{o,2}$..., $N_{o,i}$, az indexekkel ellátott β -k pedig ez utóbbiak életkor szerinti megoszlását (naptárát) (III. 5. ábra). A β -k első indexe az életkort, második indexe pedig a születési évjáratot (generációt) jelzi. A naptár elemeinek longitudinális összege természetesen minden kohorsz esetében egyenlő 1-gyel.

$$\sum_{x=0}^{\infty} \beta_{x,i} = 1.$$

A népmozgalmi események összes száma ($P_{\text{spec.}, t}$) a 0-val jelzett naptári év közepétől a következő naptári év közepéig

$$P_{\text{spec.}, t} = N_{0,0} \beta_{0,0} + N_{0,1} \beta_{1,1} + N_{0,2} \beta_{2,2} + \dots + N_{0,i} \beta_{i,i} + \dots = \sum_{i,0}^{\infty} N_{0,i} \beta_i.$$

III. 5. A NÉPMOZGALMI ESEMÉNYEK SZÁMA ÉS NAPTÁRA A KÜLÖNBÖZŐ SZÜLETÉSI KOHORSZOKBAN (GENERÁCIÓKBAN)



Amennyiben a népmozgalmi események valamely specifikus (pl. nőtlen, illetve hajadon) állapotban leélt éveinek számát jelenti, ez utóbbi formula a vonatkozó (pl. nőtlen, illetve hajadon) szubpopuláció t -időpontbeli számának hozzávetőleges meghatározására is felhasználható.

Fentiek alapján a vonatkozó népmozgalmi események un. második kategóriába tartozó, vagyis a megfelelő koru össznépesség időszak-közepi számához történő viszonyításuk útján nyert korspecifikus arányszámai ($t_{2,x,i}$):

$$t_{2,0,0} = \frac{N_{0,0} \beta_{0,0}}{P_{0,0}} = \frac{N_{0,0} \beta_{0,0}}{T_{0,0} \alpha_{0,0}} = \frac{N_{0,0} \beta_{0,0}}{B_{0,0} r_{0,0}^P}$$

$$t_{2,1,1} = \frac{N_{0,1} \beta_{1,1}}{P_{1,1}} = \frac{N_{0,1} \beta_{1,1}}{T_{0,1} \alpha_{1,1}} = \frac{N_{0,1} \beta_{1,1}}{B_{0,1} r_{1,1}^P}$$

$$t_{2,2,2} = \frac{N_{0,2} \beta_{2,2}}{P_{2,2}} = \frac{N_{0,2} \beta_{2,2}}{T_{0,2} \alpha_{2,2}} = \frac{N_{0,2} \beta_{2,2}}{B_{0,2} r_{2,2}^P}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

$$t_{2,i,i} = \frac{N_{0,i} \beta_{i,i}}{P_{i,i}} = \frac{N_{0,i} \beta_{i,i}}{T_{0,i} \alpha_{i,i}} = \frac{N_{0,i} \beta_{i,i}}{B_{0,i} r_{i,i}^P}$$

$$\begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \quad \begin{array}{c} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array}$$

A népmozgalmi események ún. második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámok - mint látni fogjuk - nemcsak a fenti módon származtathatók az egyes születési évjáratok (generációk) élettörténetéből. Megjegyzendő, hogy eme korszpecifikus arányszámok a megfelelő koru lakosok t -időpontbeli számával alkotott szorzatainak összege közelítőleg szintén a vonatkozó népmozgalmi eseményeknek a 0-val jelzett naptári év közepétől a következő naptári év közepéig terjedő egy évnnyi periódus alatti számát adja:

$$\begin{aligned} P_{\text{spec.},t} &= P_{0,0} t_{2,0,0} + P_{1,1} t_{2,1,1} + P_{2,2} t_{2,2,2} + \dots + \\ &+ P_{i,i} t_{2,i,i} + \dots = \\ &= P_{0,0} \frac{N_{0,0} \beta_{0,0}}{P_{0,0}} + P_{1,1} \frac{N_{0,1} \beta_{1,1}}{P_{1,1}} + P_{2,2} \frac{N_{0,2} \beta_{2,2}}{P_{2,2}} + \\ &+ \dots + P_{i,i} \frac{N_{0,i} \beta_{i,i}}{P_{i,i}} + \dots = \\ &= P_{0,0} \frac{N_{0,0} \beta_{0,0}}{T_{0,0} \alpha_{0,0}} + P_{1,1} \frac{N_{0,1} \beta_{1,1}}{T_{0,1} \alpha_{1,1}} + P_{2,2} \frac{N_{0,2} \beta_{2,2}}{T_{0,2} \alpha_{2,2}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dots + P_{i,i} \frac{N_{o,i} \beta_{i,i}}{T_{o,i} \alpha_{i,i}} + \dots = \\
& = P_{o,o} \frac{N_{o,o} \beta_{o,o}}{B_{o,o} r_{o,o}^p} + P_{1,1} \frac{N_{o,1} \beta_{1,1}}{B_{o,1} r_{1,1}^p} + P_{2,2} \frac{N_{o,2} \beta_{2,2}}{B_{o,2} r_{2,2}^p} + \\
& + \dots + P_{i,i} \frac{N_{o,i} \beta_{i,i}}{B_{o,i} r_{i,i}^p} + \dots = \\
& = \sum_{i=0}^{\omega} P_{\text{spec.},i} = \sum_{i=0}^{\omega} N_{o,i} \beta_i = \sum_{i=0}^{\omega} P_i t_{2,i} = \sum_{i=0}^{\omega} P_i \frac{N_{o,i} \beta_i}{P_i} = \\
& = \sum_{i=0}^{\omega} P_i \frac{N_{o,i} \beta_i}{T_{o,i} \alpha_i} = \sum_{i=0}^{\omega} P_i \frac{N_{o,i} \beta_i}{B_{o,i} r_i^p},
\end{aligned}$$

amiből az egy lakosra jutó mennyiség (a vonatkozó nyers népmozgalmi arányszám):

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\text{spec.},t}}{P_t} &= \frac{P_{o,o}}{P_t} t_{2,o,o} + \frac{P_{1,1}}{P_t} t_{2,1,1} + \frac{P_{2,2}}{P_t} t_{2,2,2} + \dots + \\
&+ \frac{P_{i,i}}{P_t} t_{2,i,i} + \dots = \\
&= \frac{P_{o,o} t_{2,o,o} + P_{1,1} t_{2,1,1} + P_{2,2} t_{2,2,2} + \dots + P_{i,i} t_{2,i,i} + \dots}{P_t} = \\
&= \frac{N_{o,o} \beta_{o,o}}{P_t} + \frac{N_{o,1} \beta_{1,1}}{P_t} + \frac{N_{o,2} \beta_{2,2}}{P_t} + \dots + \frac{N_{o,i} \beta_{i,i}}{P_t} + \dots = \\
&= \frac{N_{o,o} \beta_{o,o} + N_{o,1} \beta_{1,1} + N_{o,2} \beta_{2,2} + \dots + N_{o,i} \beta_{i,i} + \dots}{P_t} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

A népmozgalmi események valamely naptári évnvi időszak alatti száma, ez utóbbi egy lakosra jutó hányada stb. természetesen un. első kategóriába tartozó korszpecifikus

arány számaik^{*}, valamint a vonatkozó szubpopuláció és az össznépeség korévenkénti számának rendelkezésre állása esetén is kiszámítható. Ez utóbbi adatok birtokában - melyek közül valamennyi a fent leirthez hasonló módon az egyes kohorszok élettörténetéből is származtatható - természetesen a különféle, ún. tisztított arányszámok is kiszámíthatók. Ilyenek például az első házasságkötéseknek a nőtlenek, illetve a hajadonok számához történő viszonyítása útján nyert korszpecifikus arányszámok, a házasságon belüli első születéseknek a házasság, de még gyermektelen nők számához stb. történő viszonyítás útján nyert házasságtartam-specifikus arányszámok stb.

A transzverzális megfigyelés eredményeinek a népmozgalmi események (köztük a leélt idő) egyes kohorszokban megfigyelhető alakulására való visszavezetése alapján - mint azt már értekezésünk első fejezetében is jeleztük - ujszerű megközelítése, illetve meghatározása adható többek között az ún. modell-népességek ismert - más szerzők által csupán a transzverzális megfigyelés aspektusából definiált - sajátosságainak is.

A zérus szaporodási rátájú stabil népességben, vagyis a stacionér népességben - mint jeleztük - az egymást követő születési évjáratok (generációk) által leélt évek száma azonos. Azonos a különböző életkorhoz tartozás állapotában leélt évek aránya és abszolút nagysága is. Minthogy a születéskor várható átlagos élettartam nagysága minden generációban azonos (s ezért időben is változatlan, állandó), az egyes születési évjáratok által leélt évek számának változatlansága kizárólag annak lehet a következménye, hogy a vonatkozó évjáratok születéskori száma (születésszáma) is azonos, vagyis időben szintén változatlan. Minden születési évjáratban (generációban) azonos a halálozások száma is, és egyenlő az élveszületések szintén változatlan számával. A születési és a halálozási arányszám tehát minden születési évjáratban azonos és egyenlő egymással. A korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok változatlansága következtében minden születési évjáratban (generációban) azonos az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor, és azonos a meghaltak átlagos életkora is. E sajátosságokból adódik, hogy a népességet időpontról-időpontra, illetve időszakról-időszakra (pl. naptári évről-naptári évre), vagyis transzverzálisan megfigyelve és elemelve is pontosan azt állapíthatjuk meg, amit bármely születési évjárat (generáció) megfigyelése és elemzése esetében, vagyis hogy:

- a népesség száma időben változatlan, és azonos az egyes születési évjáratok (generációk) által leélt évek szintén változatlan számával;

- az élveszületések és a halálozások száma időben változatlan, egymással egyenlő nagyságú, és azonos az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, egymással szintén változatlan és egyenlő nagyságú számával;

^{*}A népmozgalmi események első kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámait - mint ismeretes - ezen eseményeknek a megfelelő korú népesség azon rétegének időszak-közepi számához való viszonyítása útján nyerjük, mely ezt a jelenséget még nem produkálta.

- a nyers születési és halálozási arányszám időben szintén változatlan, egymással egyenlő nagyságu és azonos az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, szintén változatlan és egymással szintén egyenlő nagyságu születési és halálozási arányszámokkal;

- a korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok időben változatlanok, és azonosak az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, szintén változatlan korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámokkal;

- a népesség korösszetétele és a különböző koruak abszolút száma is változatlan, és azonos a különböző születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, szintén állandó korösszetétellel és a különböző életkorhoz tartozás állapotában leélt évek számával;

- az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor és a meghaltak átlagos életkora időben változatlan, és azonos a különböző születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető vonatkozó átlagos életkorokkal.

Hogyan írhatók le matematikailag a stacionér népességnek a longitudinális szemlélet alapján a fentiekben csupán szóbelileg vázolt tulajdonságai?

A III. 3., a III. 4. és a III. 5. ábra által szemléltetett összefüggések figyelembevételével írhatjuk, hogy stacionér népességben:

$$T_{o,o} = T_{o,1} = T_{o,2} = \dots = T_{o,i} = \dots = T_o, \text{ vagyis}$$

$$\frac{P_{o,o}}{\alpha_{o,o}} = \frac{P_{1,1}}{\alpha_{1,1}} = \frac{P_{2,2}}{\alpha_{2,2}} = \dots = \frac{P_{i,i}}{\alpha_{i,i}} = \dots = T_o,$$

illetve:

$$\frac{B_{o,o} r_{o,o}^p}{\alpha_{o,o}} = \frac{B_{o,1} r_{1,1}^p}{\alpha_{1,1}} = \frac{B_{o,2} r_{2,2}^p}{\alpha_{2,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{i,i}^p}{\alpha_{i,i}} = \dots = T_o.$$

Fennáll továbbá, hogy:

$$\frac{P_{o,o}}{\alpha_{o,o}} = \frac{P_{o,1}}{\alpha_{o,1}} = \frac{P_{o,2}}{\alpha_{o,2}} = \dots = \frac{P_{o,i}}{\alpha_{o,i}} = \dots = \frac{P_o}{\alpha_o} = T_o$$

$$\frac{P_{1,o}}{\alpha_{1,o}} = \frac{P_{1,1}}{\alpha_{1,1}} = \frac{P_{1,2}}{\alpha_{1,2}} = \dots = \frac{P_{1,i}}{\alpha_{1,i}} = \dots = \frac{P_1}{\alpha_1} = T_o$$

$$\frac{P_{2,o}}{\alpha_{2,o}} = \frac{P_{2,1}}{\alpha_{2,1}} = \frac{P_{2,2}}{\alpha_{2,2}} = \dots = \frac{P_{2,i}}{\alpha_{2,i}} = \dots = \frac{P_2}{\alpha_2} = T_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{P_{i,o}}{\alpha_{i,o}} = \frac{P_{i,1}}{\alpha_{i,1}} = \frac{P_{i,2}}{\alpha_{i,2}} = \dots = \frac{P_{i,i}}{\alpha_{i,i}} = \dots = \frac{P_i}{\alpha_i} = T_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

illetve:

$$\frac{B_{o,o} r_{o,o}^p}{\alpha_{o,o}} = \frac{B_{o,1} r_{o,1}^p}{\alpha_{o,1}} = \frac{B_{o,2} r_{o,2}^p}{\alpha_{o,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{o,i}^p}{\alpha_{o,i}} = \frac{B_o r_o^p}{\alpha_o} = T_o$$

$$\frac{B_{o,o} r_{1,o}^p}{\alpha_{1,o}} = \frac{B_{o,1} r_{1,1}^p}{\alpha_{1,1}} = \frac{B_{o,2} r_{1,2}^p}{\alpha_{1,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{1,i}^p}{\alpha_{1,i}} = \frac{B_1 r_1^p}{\alpha_1} = T_o$$

$$\frac{B_{o,o} r_{2,o}^p}{\alpha_{2,o}} = \frac{B_{o,1} r_{2,1}^p}{\alpha_{2,1}} = \frac{B_{o,2} r_{2,2}^p}{\alpha_{2,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{2,i}^p}{\alpha_{2,i}} = \frac{B_2 r_2^p}{\alpha_2} = T_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{B_{o,o} r_{i,o}^p}{\alpha_{i,o}} = \frac{B_{o,1} r_{i,1}^p}{\alpha_{i,1}} = \frac{B_{o,2} r_{i,2}^p}{\alpha_{i,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{i,i}^p}{\alpha_{i,i}} = \frac{B_i r_i^p}{\alpha_i} = T_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Mintthogy az összesen leélt évek számának életkor szerinti megoszlása (naptára) minden születési évjáratban (generációban) azonos, vagyis:

$$\alpha_{o,o} = \alpha_{o,1} = \alpha_{o,2} = \dots = \alpha_{o,i} = \dots = \alpha_o$$

$$\alpha_{1,o} = \alpha_{1,1} = \alpha_{1,2} = \dots = \alpha_{1,i} = \dots = \alpha_1$$

$$\alpha_{2,o} = \alpha_{2,1} = \alpha_{2,2} = \dots = \alpha_{2,i} = \dots = \alpha_2$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\alpha_{i,o} = \alpha_{i,1} = \alpha_{i,2} = \dots = \alpha_{i,i} = \dots = \alpha_i$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Kimutatható, hogy:

$$\frac{P_{o,o}}{T_{o,o}} = \frac{P_{o,1}}{T_{o,1}} = \frac{P_{o,2}}{T_{o,2}} = \dots = \frac{P_{o,i}}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_o$$

$$\frac{P_{1,o}}{T_{o,o}} = \frac{P_{1,1}}{T_{o,1}} = \frac{P_{1,2}}{T_{o,2}} = \dots = \frac{P_{1,i}}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_1$$

$$\frac{P_{2,o}}{T_{o,o}} = \frac{P_{2,1}}{T_{o,1}} = \frac{P_{2,2}}{T_{o,2}} = \dots = \frac{P_{2,i}}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_2$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{P_{i,o}}{T_{o,o}} = \frac{P_{i,1}}{T_{o,1}} = \frac{P_{i,2}}{T_{o,2}} = \dots = \frac{P_{i,i}}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_i$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

illetve:

$$\frac{B_{o,o} r_{o,o}^p}{T_{o,o}} = \frac{B_{o,1} r_{o,1}^p}{T_{o,1}} = \frac{B_{o,2} r_{o,2}^p}{T_{o,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{o,i}^p}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_o$$

$$\frac{B_{o,o} r_{1,o}^p}{T_{o,o}} = \frac{B_{o,1} r_{1,1}^p}{T_{o,1}} = \frac{B_{o,2} r_{1,2}^p}{T_{o,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{1,i}^p}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_1$$

$$\frac{B_{o,o} r_{2,o}^p}{T_{o,o}} = \frac{B_{o,1} r_{2,1}^p}{T_{o,1}} = \frac{B_{o,2} r_{2,2}^p}{T_{o,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{2,i}^p}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_2$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{B_{o,o} r_{i,o}^p}{T_{o,o}} = \frac{B_{o,1} r_{i,1}^p}{T_{o,1}} = \frac{B_{o,2} r_{i,2}^p}{T_{o,2}} = \dots = \frac{B_{o,i} r_{i,i}^p}{T_{o,i}} = \dots = \alpha_i$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Azon tulmenően továbbá, hogy:

$$B_{o,o} = B_{o,1} = B_{o,2} = \dots = B_{o,i} = \dots = B_o$$

vagyis:

$$\frac{P_{o,o}}{r_{o,o}^p} = \frac{P_{1,1}}{r_{1,1}^p} = \frac{P_{2,2}}{r_{2,2}^p} = \dots = \frac{P_{i,i}}{r_{i,i}^p} = \dots = B_o ,$$

illetve:

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{o,o}}{r_{o,o}^p} = \frac{T_{o,1} \alpha_{1,1}}{r_{1,1}^p} = \frac{T_{o,2} \alpha_{2,2}}{r_{2,2}^p} = \frac{T_{o,i} \alpha_{i,i}}{r_{i,i}^p} = B_o ,$$

kimutatható az is, hogy:

$$\frac{P_{o,o}}{r_{o,o}^p} = \frac{P_{o,1}}{r_{o,1}^p} = \frac{P_{o,2}}{r_{o,2}^p} = \dots = \frac{P_{o,i}}{r_{o,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\frac{P_{1,o}}{r_{1,o}^p} = \frac{P_{1,1}}{r_{1,1}^p} = \frac{P_{1,2}}{r_{1,2}^p} = \dots = \frac{P_{1,i}}{r_{1,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\frac{P_{2,o}}{r_{2,o}^p} = \frac{P_{2,1}}{r_{2,1}^p} = \frac{P_{2,2}}{r_{2,2}^p} = \dots = \frac{P_{2,i}}{r_{2,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{P_{i,o}}{r_{i,o}^p} = \frac{P_{i,1}}{r_{i,1}^p} = \frac{P_{i,2}}{r_{i,2}^p} = \dots = \frac{P_{i,i}}{r_{i,i}^p} = \dots = B_o ,$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

illetve:

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{o,o}}{r_{o,o}^p} = \frac{T_{o,1} \alpha_{o,1}}{r_{o,1}^p} = \frac{T_{o,2} \alpha_{o,2}}{r_{o,2}^p} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{o,i}}{r_{o,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{1,o}}{r_{1,o}^p} = \frac{T_{o,1} \alpha_{1,1}}{r_{1,1}^p} = \frac{T_{o,2} \alpha_{1,2}}{r_{1,2}^p} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{1,i}}{r_{1,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{2,o}}{r_{2,o}^p} = \frac{T_{o,1} \alpha_{2,1}}{r_{2,1}^p} = \frac{T_{o,2} \alpha_{2,2}}{r_{2,2}^p} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{2,i}}{r_{2,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{i,o}}{r_{i,o}^p} = \frac{T_{o,1} \alpha_{i,1}}{r_{i,1}^p} = \frac{T_{o,2} \alpha_{i,2}}{r_{i,2}^p} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{i,i}}{r_{i,i}^p} = \dots = B_o$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Az $r_{x,i}^p$ továbbélési valószínűségeknek, vagyis a halandóságnak az egyes születési évjáratokban (generációkban) fennálló azonossága folytán:

$$r_{o,o}^o = r_{o,1}^p = r_{o,2}^p = \dots = r_{o,i}^p = \dots = r_o^p$$

$$r_{1,o}^p = r_{1,1}^p = r_{1,2}^p = \dots = r_{1,i}^p = \dots = r_1^p$$

$$r_{2,o}^p = r_{2,1}^p = r_{2,2}^p = \dots = r_{2,i}^p = \dots = r_2^p$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{i,o}^p & = & r_{i,1}^p & = & r_{i,2}^p & = & \dots & = & r_{i,i}^p & = & \dots & = & r_i^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

vagyis:

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{o,o}}{B_{o,o}} = \frac{T_{o,1} \alpha_{o,1}}{B_{o,1}} = \frac{T_{o,2} \alpha_{o,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{o,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{T_o \alpha_o}{B_o}$$

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{1,o}}{B_{o,o}} = \frac{T_{o,1} \alpha_{1,1}}{B_{o,1}} = \frac{T_{o,2} \alpha_{1,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{1,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{T_o \alpha_1}{B_o}$$

$$\frac{T_{o,o} \alpha_{2,o}}{B_{o,o}} = \frac{T_{o,1} \alpha_{2,1}}{B_{o,1}} = \frac{T_{o,2} \alpha_{2,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{T_{o,i} \alpha_{2,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{T_o \alpha_2}{B_o}$$

$$\begin{array}{ccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{T_{o,o} \alpha_{i,o}}{B_{o,o}} & = & \frac{T_{o,1} \alpha_{i,1}}{B_{o,1}} & = & \frac{T_{o,2} \alpha_{i,2}}{B_{o,2}} & = & \dots & = & \frac{T_{o,i} \alpha_{i,i}}{B_{o,i}} & = & \dots & = & \frac{T_o \alpha_i}{B_o} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

illetve:

$$\frac{P_{o,o}}{B_{o,o}} = \frac{P_{o,1}}{B_{o,1}} = \frac{P_{o,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{P_{o,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{P_o}{B_o}$$

$$\frac{P_{1,o}}{B_{o,o}} = \frac{P_{1,1}}{B_{o,1}} = \frac{P_{1,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{P_{1,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{P_1}{B_o}$$

$$\frac{P_{2,o}}{B_{o,o}} = \frac{P_{2,1}}{B_{o,1}} = \frac{P_{2,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{P_{2,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{P_2}{B_o}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{P_{i,o}}{B_{o,o}} = \frac{P_{i,1}}{B_{o,1}} = \frac{P_{i,2}}{B_{o,2}} = \dots = \frac{P_{i,i}}{B_{o,i}} = \dots = \frac{P_i}{B_o}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

A különböző korúak számának (és a kormegoszlásnak) időbeli változatlanlansága foly-
tán:

$$P_{o,o} = P_{o,1} = P_{o,2} = \dots = P_{o,i} = \dots = P_o$$

$$P_{1,o} = P_{1,1} = P_{1,2} = \dots = P_{1,i} = \dots = P_1$$

$$P_{2,o} = P_{2,1} = P_{2,2} = \dots = P_{2,i} = \dots = P_2$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_{i,o} = P_{i,1} = P_{i,2} = \dots = P_{i,i} = \dots = P_i$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

vagyis:

$$T_{o,o} \alpha_{o,o} = T_{o,1} \alpha_{o,1} = T_{o,2} \alpha_{o,2} = \dots = T_{o,i} \alpha_{o,i} = \dots = T_o \alpha_o$$

$$T_{o,o} \alpha_{1,o} = T_{o,1} \alpha_{1,1} = T_{o,2} \alpha_{1,2} = \dots = T_{o,i} \alpha_{1,i} = \dots = T_o \alpha_1$$

$$\begin{array}{ccccccc}
T_{o,o} \alpha_{2,o} & = & T_{o,1} \alpha_{2,1} & = & T_{o,2} \alpha_{2,2} & = & \dots = T_{o,i} \alpha_{2,i} = \dots = T_o \alpha_2 \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
T_{o,o} \alpha_{i,o} & = & T_{o,1} \alpha_{i,1} & = & T_{o,2} \alpha_{i,2} & = & \dots = T_{o,i} \alpha_{i,i} = \dots = T_o \alpha_i \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & .
\end{array}$$

illetve:

$$\begin{array}{ccccccc}
B_{o,o} r_{o,o}^p & = & B_{o,1} r_{o,1}^p & = & B_{o,2} r_{o,2}^p & = & \dots = B_{o,i} r_{o,i}^p = \dots = B_o r_o^p \\
B_{o,o} r_{1,o}^p & = & B_{o,1} r_{1,1}^p & = & B_{o,2} r_{1,2}^p & = & \dots = B_{o,i} r_{1,i}^p = \dots = B_o r_1^p \\
B_{o,o} r_{2,o}^p & = & B_{o,1} r_{2,1}^p & = & B_{o,2} r_{2,2}^p & = & \dots = B_{o,i} r_{2,i}^p = \dots = B_o r_2^p \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
B_{o,o} r_{i,o}^p & = & B_{o,1} r_{i,1}^p & = & B_{o,2} r_{i,2}^p & = & \dots = B_{o,i} r_{i,i}^p = \dots = B_o r_i^p \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & .
\end{array}$$

Stacionér népességben a második kategóriába tartozó általános korszpecifikus termékenységi arányszámok ($t_{2,x,i}^b$) minden születési évjáratban (generációban) azonosak, vagyis:

$$\begin{array}{ccccccc}
t_{2,o,o}^b & = & t_{2,o,1}^b & = & t_{2,o,2}^b & = & \dots = t_{2,o,i}^b = \dots = t_{2,o}^b \\
t_{2,1,o}^b & = & t_{2,1,1}^b & = & t_{2,1,2}^b & = & \dots = t_{2,1,i}^b = \dots = t_{2,1}^b \\
t_{2,2,o}^b & = & t_{2,2,1}^b & = & t_{2,2,2}^b & = & \dots = t_{2,2,i}^b = \dots = t_{2,2}^b \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & . \\
t_{2,i,o}^b & = & t_{2,i,1}^b & = & t_{2,i,2}^b & = & \dots = t_{2,i,i}^b = \dots = t_{2,i}^b \\
. & & . & & . & & . \\
. & & . & & . & & .
\end{array}$$

és - mint láttuk - azonos minden születési évjáratban (generációban) az egyes életkorokhoz tartozás állapotában leélt évek száma is.

Az egyes születési évjáratokra vonatkozóan kiszámítható, egymással is azonos nyers születési arányszámok azonosak a valamely naptári évre vonatkozó adatok alapján kiszámíthatóval (b) is:

$$\frac{P_{0,0}}{T_{0,0}} t_{2,0,0}^b + \frac{P_{1,0}}{T_{0,0}} t_{2,1,0}^b + \frac{P_{2,0}}{T_{0,0}} t_{2,2,0}^b + \dots + \frac{P_{i,0}}{T_{0,0}} t_{2,i,0}^b + \dots = b_0$$

$$\frac{P_{0,1}}{T_{0,1}} t_{2,0,1}^b + \frac{P_{1,1}}{T_{0,1}} t_{2,1,1}^b + \frac{P_{2,1}}{T_{0,1}} t_{2,2,1}^b + \dots + \frac{P_{i,1}}{T_{0,1}} t_{2,i,1}^b + \dots = b_1$$

$$\frac{P_{0,2}}{T_{0,2}} t_{2,0,2}^b + \frac{P_{1,2}}{T_{0,2}} t_{2,1,2}^b + \frac{P_{2,2}}{T_{0,2}} t_{2,2,2}^b + \dots + \frac{P_{i,2}}{T_{0,2}} t_{2,i,2}^b + \dots = b_2$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

$$\frac{P_{0,i}}{T_{0,i}} t_{2,0,i}^b + \frac{P_{1,i}}{T_{0,i}} t_{2,1,i}^b + \frac{P_{2,i}}{T_{0,i}} t_{2,2,i}^b + \dots + \frac{P_{i,i}}{T_{0,i}} t_{2,i,i}^b + \dots = b_i$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \end{array}$$

vagyis stacionér népességben

$$b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b$$

Mínthogy stacionér népességben a korszpecifikus halálozási arányszámok ($t_{2,x,i}^d$) is azonosak minden születési évjáratban (generációban), a fentiekhez hasonló meggondolások alapján látható be, hogy az egyes születési évjáratokra vonatkozóan kiszámítható, egymással is azonos nyers halálozási arányszámok ($d_0, d_1, d_2, \dots, d_i, \dots$) azonosak a valamely naptári évre vonatkozó adatok alapján kiszámíthatóval (d) is:

$$d_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_i \dots = d$$

Mínthogy $b_0 = d_0, b_1 = d_1, b_2 = d_2, \dots, b_i = d_i \dots$, könnyen belátható, hogy $b = d$, és mivel $b = d = 1/e_0^0$, és

$$\begin{aligned}
e_{o,o}^o &= e_{o,1}^o = e_{o,2}^o = \dots = e_{o,i}^o = \dots, \text{ az is érthető, hogy} \\
1/e_{o,o}^o &= 1/e_{o,1}^o = 1/e_{o,2}^o = \dots = 1/e_{o,i}^o = \dots = \\
&= b_o = b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = \\
&= d_o = d_1 = d_2 = \dots = d_i = \dots = \\
&= d = b = 1/e_o^o.
\end{aligned}$$

Hasonló megfontolások alapján látható be, hogy az anyák gyermekeik megszületésekor átlagos életkorának az egyes születési évjáratokban megfigyelhető, egymással azonos értékei transzverzálisan megfigyelhető értékével is azonosak, továbbá: a meghaltak átlagos életkorának az egyes születési évjáratokban megfigyelhető, egymással azonos értékei a transzverzálisan megfigyelhető értékével is azonosak. Ez utóbbi megállapítás helyessége egyébként az

$$e_{o,o}^o = e_{o,1}^o = e_{o,2}^o = \dots = e_{o,i}^o = \dots = e_o^o$$

egyenlőségsorozatról is kitűnik, minthogy stacionér népességben a meghaltak átlagos életkora - mint ismeretes - azonos a születéskor várható átlagos élettartammal.

Minthogy stacionér népességben a halálozások egyes születési évjáratokban megfigyelhető, az élveszületésekével azonos számai egyenlőek, és minden generációban azonos a halálozások életkor szerinti megoszlása (naptára) is, vagyis:

$$\begin{aligned}
D_{o,o} &= D_{o,1} = D_{o,2} = \dots = D_{o,i} = \dots = D_o \\
D_{1,o} &= D_{1,1} = D_{1,2} = \dots = D_{1,i} = \dots = D_1 \\
D_{2,o} &= D_{2,1} = D_{2,2} = \dots = D_{2,i} = \dots = D_2 \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
D_{i,o} &= D_{i,1} = D_{i,2} = \dots = D_{i,i} = \dots = D_i \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}$$

kimutatható, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1} = \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} = \dots = \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i} = \dots = \sum_{x=0}^{\omega} D_x = \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i}.$$

Fennforog továbbá - mint jeleztük -, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,0} = B_{0,0}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1} = B_{0,1}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} = B_{0,2}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i} = B_{0,i}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}$$

amiből ismét kitűnik, hogy:

$$B_{0,0} = B_{0,1} = B_{0,2} = \dots = B_{0,i} = \dots = B_0.$$

Bebizonyosodik tehát, hogy a stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népességnek a transzverzális megfigyelés aspektusából meghatározott, ismert tulajdonságai e népességek egyes születési évjárataiban (generációiban) megfigyelhető tulajdonságaiból is származtathatók. Ez utóbbiak ugyanakkor e népességek egyes naptári időszakok (pl. naptári évek) alatt megfigyelhető sajátosságaiból is levezethetők.

2. A stacionér népesség átlagos életkorának és átlagos halálozási korának meghatározása a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt, és az általa még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó tétel alapján

A stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) legegyszerűbben az azonos eredményt adó alábbi formulák valamelyikével számítható ki:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xP_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_x}{\sum_{x=0}^{\omega} xD_x},$$

illetve a halandósági tábla jelöléseit alkalmazva:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xL_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xL_x}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xL_x}{\frac{1}{2} l_0 + \sum_{x=0}^{\omega} l_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} xL_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}.$$

A stacionér népesség átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) - mint látni fogjuk - átlagos életkorának kétszerese, illetve: átlagos életkora az átlagos halálozási korának fele:

$$\bar{g} = 2\bar{a} \quad \text{és} \quad \bar{a} = \frac{1}{2}\bar{g}.$$

Mínt hogy a halandósági tábla népessége is stacionér népesség, melyen a stacionér népesség minden tulajdonsága kimutatható, értekezésünk e fejezetében fejtegetéseinket, bizonyításainkat az egyszerűség kedvéért a halandósági tábla stacionér népességének alapulvételével, az ennek a stacionér népességnek a leírására, meghatározására vonatkozó, ismert összefüggéseknek és matematikai jelöléseknek felhasználásával végezzük el. Számos halandósági táblában a táblabeli stacionér népesség életkoronkénti létszámát feltüntető oszlop (L_x), és az x éves, és ennél idősebb stacionér népesség létszámát feltüntető oszlop

($T_x = \sum_{x=\omega}^{x=x} L_x$) egyaránt megtalálható, illetve a tábla többi mutatójának (oszlopának) adataiból viszonylag könnyen kiszámítható. A stacionér népesség életkoronkénti létszámát feltüntető oszlop - melynek kiszámítása legegyszerűbben a továbbélési, illetve kihalási rend (l_x) megfelelő szomszédos értékei számtani középértékének meghatározása útján történhet

$$[L_x = (l_x + l_{x+1}) : 2] \quad - \text{ egyben a tábla ujszülöttjei (l_0) által a jövőben, összes meg-$$

haltjai ($\sum_{x=0}^{\omega} d_x = l_0$) által a múltban, és a tábla népessége által évenként a vonatkozó életkorokhoz tartozás állapotában leélendő, illetve leélt évek számát is mutatja. Az x éves, és ennél idősebb stacionér népesség létszámát feltüntető oszlop hasonlóképpen a tábla ujszülöttjei, x évesnél fiatalabb és az x éves egzakt életkort elért továbbélői által a jövőben, összes meghaltjai által a múltban, és a tábla népessége által évenként az x éves korhoz és ennél magasabb életkorokhoz tartozás állapotában leélendő, illetve leélt évek számát is mutatja. Ismeretes, hogy

$$T_x = \sum_{x=\omega}^{x=x} L_x = l_x \cdot e_x^0 = \text{stb.},$$

a táblabeli stacionér népesség összlétszáma pedig:

$$T_0 = \sum_{x=\omega}^0 L_x = l_0 \cdot e_0^0 = \text{stb.}$$

A halandósági táblabeli stacionér népességet véve alapul, értekezésünk e fejezetével a halandósági tábla mutatói közötti összefüggések kiterjesztését, további elmélyítését is szolgálni fogjuk. A stacionér népességek és alnépességek (szubpopulációk) matematikailag levezetett további tulajdonságainak létezését számszerű példákkal is fogjuk illusztrálni. Számításaink céljára Magyarország férfi és női népességének Pallós Emil által összeállított halandósági tábláit (49) használtuk fel, és tanulmányoztuk más hazai szerzőknek e témával kapcsolatos munkáit is (50, 51).

Mielőtt a stacionér populációk és szubpopulációk további új tulajdonságainak bemutatására, matematikai levezetésére rátérnénk, szeretnénk felidézni azt az értekezésünk első fejezetében már ismertetett eljárást, ahogyan egyes demográfusok azt a közismert tételt bizonyítják, hogy a születéskor várható átlagos élettartam a halandósági tábla (és általában a stacionér népesség) meghaltjainak átlagos életkora. E bizonyítási eljárással analóg módon fogjuk ugyanis számos esetben a további új tulajdonságok létezését is bizonyítani. Lássuk tehát e bizonyítási módot,

Ismeretes, hogy

$$e_o^o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{l_o} = \frac{T_o}{l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{T_o}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} .$$

Bizonyítandó, hogy

$$e_o^o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} ,$$

vagyis, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_o = \sum_{x=0}^{\omega} x d_x .$$

Elfogadva, hogy

$$L_x = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}}{2} ,$$

vagyis, hogy a betöltött éveik száma alapján x éves korukban meghaltak és az x éves koru élők átlagosan $x + 0,5$ évesek, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} x d_x &= 0,5 d_0 + 1,5 d_1 + 2,5 d_2 + \dots = \\
&= 0,5 d_0 + \\
&+ 0,5 d_1 + d_1 \\
&+ 0,5 d_2 + d_2 + d_2 \\
&\dots \\
&= 0,5 \sum_{x=0}^{\omega} d_x + \sum_{x=1}^{\omega} d_x + \sum_{x=2}^{\omega} d_x + \dots = \\
&= 0,5 l_0 + l_1 + l_2 + \dots = \\
&= \frac{l_0 + l_1}{2} + \frac{l_1 + l_2}{2} + \frac{l_2 + l_3}{2} + \dots = \\
&= L_0 + L_1 + L_2 + \dots = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_0, \quad \text{vagyis} \\
e_0^0 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{T_0}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x},
\end{aligned}$$

ahol természetesen

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_x \text{ helyett } l_0 \text{ is írható.}$$

Ennek a bizonyítási módnak a felidézése után térhetünk rá a stacionér populációk és szubpopulációk újabb tulajdonságainak demonstrálására és levezetésére. Ezt megelőzően idézzük még fel emlékezetünkben, hogy a valamely stacionér népesség által évenként leélt

összes évek száma $(\sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_0)$ egyenlő a bármely születési évjárat újszülöttjei (l_0) által leélendő, illetve meghaltjai $(\sum_{x=0}^{\omega} d_x = l_0)$ által leélt összes évek számával $(l_0 \cdot e_0^0 = \sum_{x=0}^{\omega} x d_x = T_0)$, s egyben a népesség tetszőleges időpontban megfigyelhető összlétszámával is.

A stacionér népesség átlagos életkorának és átlagos halálozási korának kiszámítása során kiindulhatunk Louis Henry-nak abból a csupán szóbelileg megfogalmazott, de min-

den kétséget kizáróan korrekt megállapításából is, hogy valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt összes évek száma mindig egyenlő az általa még összesen leélendő évek számával (a népesség un. életpotenciáljával), átlagos életkora tehát egyenlő a különböző korúak által leélendő átlagos élettartamok súlyozott számtani átlagával (az un. egy lakosra jutó életpotenciállal), átlagos életkorának kétszerese pedig egyenlő a különböző korúak átlagos halálozási korainak $(x + e_x^{0'})$ súlyozott számtani átlagával (37).

Hogyan bizonyítható, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt összes évek száma egyenlő az általa még leéendő összes évek számával, vagyis, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \quad ?$$

A fenti formulában $e_x^{0'}$ a betöltött éveik száma alapján x évesek által még várható átlagos élettartamot jelzi, míg tehát $e_x^0 = T_x/1_x$, megállapodhatunk abban, hogy

$$e_x^{o'} = \frac{\frac{T_x + T_{x+1}}{2}}{L_x} \quad .$$

A szóban forgó egyenlőség fennforgása - mint azt értekezésünk első fejezetében is jeleztük - többek között annak alapján látható be, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\infty} x L_x = 0,5 L_0 + 1,5 L_1 + 2,5 L_2 + \dots =$$

Ez oszloponként összeadva:

$$= 0,5 T_0 + T_1 + T_2 + \dots =$$

$$= \frac{T_0 + T_1}{2} + \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 + T_3}{2} + \dots =$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \quad \text{és}$$

$$\sum_{x=0}^{\infty} e_x^{o'} L_x = e_0^{o'} L_0 + e_1^{o'} L_1 + e_2^{o'} L_2 + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{T_0 + T_1}{2}}{L_0} L_0 + \frac{\frac{T_1 + T_2}{2}}{L_1} L_1 + \frac{\frac{T_2 + T_3}{2}}{L_2} L_2 + \dots = \\
&= \frac{T_0 + T_1}{2} + \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 + T_3}{2} + \dots = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right),
\end{aligned}$$

vagyis

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right),$$

aminek alapján

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}$$

és

$$\begin{aligned}
\bar{g} = 2 \bar{a} &= \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x},
\end{aligned}$$

ami által Henry szóbelileg megfogalmazott megállapításainak helyességét matematikailag is igazoltuk.

Általában azt tapasztaljuk, hogy

$$\bar{g} = 2 \bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} > e_0^{o'},$$

minthogy többnyire fennáll, hogy $(x + e_x^{o'}) > e_o^{o'}$.

A stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a} = 0,5 \bar{g}$) ugyanakkor a tulságosan magas színvonalu (tulságosan kedvezőtlen) halandóság extrém eseteinek kivételével általában kisebb a születéskor várható átlagos élettartamnál (a meghaltak átlagos életkoránál), vagyis többnyire kimutatható, hogy:

$$\bar{a} = 0,5 \bar{g} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} < e_o^{o'}.$$

Fentiekben a stacionér népesség átlagos életkorát és átlagos halálozási korát a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt, és az általa még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó tételből kiindulva határoztuk meg. E tétellel kapcsolatban fontos annak megértése is, hogy a valamely tetszőleges t időpontban megfigyelt stacionér népességet alkotó születési évjáratok által leélt összes évek száma nem egyenlő a t időpontig továbbélők által ezen időpontig leélt és ezen időpont után leélendő évek számának összegével, hanem nagyobb annál. Amennyiben a t időpontban megfigyelt stacionér népességet n számú születési évjárat alkotja, melynek mindegyike T_o számú évet él le, az ezen évjáratok által leélt összes évek száma $n T_o$ lesz, és

$$n T_o \neq \left(\sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right)$$

$$n T_o \neq \sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]$$

$$n T_o \neq 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x$$

$$n T_o \neq 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x,$$

hanem

$$n T_o > \left(\sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right)$$

$${}_n T_o > \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]$$

$${}_n T_o > 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x$$

$${}_n T_o > 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x .$$

Ennek az az oka, hogy $\sum_{x=0}^{\omega} x L_x$ csupán a megfigyelés időpontjáig továbbélők által ezen időpontig leélt évek számát mutatja, a megfigyelés időpontjáig meghaltak által leélt évek számát nem tartalmazza. A megfigyelés időpontjáig meghaltak által ezen időpontig leélt évek száma:

$$\begin{aligned} {}_n T_o - \left(\sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right) &= \\ &= \left({}_n T_o - \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right) - \sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] . \end{aligned}$$

A valamely t időpontban megfigyelt népességet alkotó születési évjáratok által leélt összes évek száma:

$$\begin{aligned} {}_n T_o &= \sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_x - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x .
\end{aligned}$$

A megfigyelés t időpontjáig továbbélők és meghaltak által leélt évek számának összege természetesen minden esetben nagyobb a csak a továbbélők, illetve csak a meghaltak által ezen időpontig leélt évek számánál:

$$\sum_{x=0}^{\omega} (T_0 - e_x^{o'} L_x) > \sum_{x=0}^{\omega} x L_x$$

és
$$\sum_{x=0}^{\omega} (T_0 - e_x^{o'} L_x) > \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] .$$

Könnyen belátható, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} (T_0 - e_x^{o'} L_x) - \sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right]$$

és
$$\sum_{x=0}^{\omega} (T_0 - e_x^{o'} L_x) - \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x .$$

A stacionér népesség átlagos életkorának ($\bar{a}$) és átlagos halálozási korának ($\bar{g}$) kiszámítására szolgáló formuláknak az ezen népesség által már leélt, és az általa még leélen-dő évek száma egyenlőségére vonatkozó tételből való származtatása során megállapodtunk abban, hogy e formulákban az x a betöltött évek számát jelzi, az $e_x^{o'}$ mutató esetében a be-töltött éveik száma alapján x évesek (L_x) által várható átlagos élettartamról van szó, míg tehát $e_x^o = T_x / l_x$, megállapodhatunk abban, hogy

$$e_x^{o'} = \frac{\frac{T_x + T_{x+1}}{2}}{L_x} ,$$

vagyis $e_x^{o'} \neq e_x^o$, minthogy azonban az $e_x^{o'}$ kiszámítására szolgáló formulában a szám-láló és a nevező értéke is kisebb, mint az e_x^o kiszámítására szolgáló formulában, megállapodhatjuk azt is, hogy $e_x^{o'} \approx e_x^o$. Ezzel kapcsolatban azonban szükségesnek tartjuk megjegyezni még azt is, hogy a betöltött évek száma alapján x éves korban várható átlagos élet-tartam (e_x^o) nem csupán az

$$e_x^o = \frac{\frac{T_x + T_{x+1}}{2}}{L_x}$$

formula segítségével határozható meg.

Az ún. potenciális demográfia egyes művelői ezt az átlagos élettartamot gyakran az x éves és az $x + 1$ éves egzakt életkorban várható átlagos élettartamok számtani középértékeként, vagyis az

$$\frac{e_x^o + e_{x+1}^o}{2}$$

formula segítségével határozzák meg, amely az általunk használt formulánál kevésbé pontos eredményt ad. Bebizonyítható azonban, hogy

$$e_x^{o'} = \frac{\frac{T_x + T_{x+1}}{2}}{L_x} \approx \frac{e_x^o + e_{x+1}^o}{2},$$

s az értékek közötti különbség

$$\frac{e_x^o + e_{x+1}^o}{2} - e_x^{o'} = - \frac{(l_x - l_{x+1}) (e_x^o - e_{x+1}^o)}{l_x + l_{x+1}},$$

ami, ha $e_x^o < e_{x+1}^o$, vagyis 0 éves korban, akkor pozitív előjelű, ha pedig $e_x^o > e_{x+1}^o$, vagyis az összes többi életkorban, negatív előjelű eltérést jelent.

Miből adódik ez az eltérés? Könnyen belátható, hogy

$$e_x^{o'} = \frac{\frac{T_x + T_{x+1}}{2}}{L_x} = \frac{\frac{l_x e_x^o + l_{x+1} e_{x+1}^o}{2}}{\frac{l_x + l_{x+1}}{2}} = \frac{l_x e_x^o + l_{x+1} e_{x+1}^o}{l_x + l_{x+1}},$$

és

$$\begin{aligned} & \frac{e_x^o + e_{x+1}^o}{2} - \frac{l_x e_x^o + l_{x+1} e_{x+1}^o}{l_x + l_{x+1}} = \\ & = \frac{(e_x^o + e_{x+1}^o) (l_x + l_{x+1}) - 2 (l_x e_x^o + l_{x+1} e_{x+1}^o)}{2 (l_x + l_{x+1})} = \\ & = \frac{l_x e_x^o + l_x e_{x+1}^o + l_{x+1} e_x^o + l_{x+1} e_{x+1}^o - 2 (l_x e_x^o + l_{x+1} e_{x+1}^o)}{2 (l_x + l_{x+1})} = \\ & = \frac{-l_x e_x^o - l_{x+1} e_{x+1}^o + l_x e_{x+1}^o + l_{x+1} e_x^o}{2 (l_x + l_{x+1})} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{l_x e_x^0 + l_{x+1} e_{x+1}^0 - l_x e_{x+1}^0 - l_{x+1} e_x^0}{2 (l_x + l_{x+1})} = \\
&= - \frac{e_x^0 (l_x - l_{x+1}) - e_{x+1}^0 (l_x - l_{x+1})}{2 (l_x + l_{x+1})} = \\
&= - \frac{(l_x - l_{x+1}) (e_x^0 - e_{x+1}^0)}{2 (l_x + l_{x+1})} .
\end{aligned}$$

Meghatározható-e más, az eddigiektől eltérő módon is a stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) és átlagos halálozási kora ($\bar{g}$)?

A stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) az erre a célra ujabban Norman B. Ryder által proponált (46) alábbi formulákkal^{*} is meghatározható:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = \frac{e_0^0 (1 + C^2)}{2} .$$

E formulák közül a középsőben található

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}$$

kifejezés az un. kontraharmónikus átlag kiszámítására szolgáló formulaként is felfogható, melynek alkalmazása a demográfiai kutató munkában eléggé gyakori (52). A harmadik formulában szereplő C^2 a halandósági táblabeli (és általában a stacionér népességen belüli) halálozási korok szóródási együtthatójának (variációs koefficiensének) négyzete. A halálozási korok szórása (D) az alábbi formulával határozható meg:

$$D = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_0^0)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}} .$$

^{*}Ryder e formulákat folytonos megfogalmazásban adja meg:

$$\bar{a} = \frac{\int_0^{\infty} x l_x dx}{\int_0^{\infty} l_x dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_0^{\infty} x^2 d_x}{\int_0^{\infty} x d_x} = \frac{e_0^0 (1 + C^2)}{2}$$

matematikailag diszkrét formában történő megfogalmazásukra és elemzésükre értekezésünk többi formulájával és elemzésével való egyöntetűség biztosítása céljából térünk rá.

A szóródási együttható (variációs koefficiens) tehát:

$$C = \frac{D}{e_o} = \sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}} ,$$

a szóródási együttható (variációs koefficiens) négyzete pedig:

$$C^2 = \left(\frac{D}{e_o} \right)^2 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} .$$

Hogyan függenek össze Ryder formulái a korábban javasoltakkal és Henry-nak a fentiekben matematikailag is megfogalmazott és bizonyított megállapításaival?

Lássuk mindenekelőtt, hogyan bizonyítható matematikailag, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} ?$$

Minthogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} x d_x = T_o , \text{ a szóban forgó bizonyítás a}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x ,$$

illetve a

$$2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x \text{ egyenlőségek fennforgásának bizonyítá-}$$

saként is felfogható.

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x &= 0,5^2 d_0 + 1,5^2 d_1 + 2,5^2 d_2 + \dots = \\
&= 0,25 d_0 + \\
&+ 0,25 d_1 + d_1 + d_1 + \\
&+ 0,25 d_2 + d_2 + d_2 + d_2 + d_2 + d_2 + d_2 + \dots
\end{aligned}$$

Ez oszlo-
pontként

$$\begin{aligned}
\text{összeadva} &= 0,25 l_0 + l_1 + l_1 + l_2 + l_2 + l_2 + l_2 + \dots = \\
&= 0,25 l_0 + 2 l_1 + 4 l_2 + 6 l_3 + 8 l_4 + \dots
\end{aligned}$$

Megengedve, hogy $L_0 = 0,5^2 l_0 + 0,5 l_1$, az L_x további értékei pedig $L_x = 0,5 (l_x + l_{x+1})$ formula segítségével határozhatók meg, írhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x &= (0,25 l_0 + 0,5 l_1) + [(0,5 l_1 + 0,5 l_2) + \\
&+ (0,25 l_1 + 0,5 l_2) + (0,5 l_1 + 0,5 l_2)] + \\
&+ [(0,5 l_2 + 0,5 l_3) + (0,5 l_2 + 0,5 l_3) + (0,5 l_2 + 0,5 l_3) + \\
&+ (0,5 l_2 + 0,5 l_3) + (0,5 l_2 + 0,5 l_3)] + \dots = \\
&= L_0 + 3 L_1 + 5 L_2 + \dots, \text{ vagyis}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x = 0,5 L_0 + 1,5 L_1 + 2,5 L_2 + \dots = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x.$$

Következésképpen

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{T_0} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}.$$

$$A \quad \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} \quad \text{egyenlőség fennforgásának bizonyítása után a}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}$$

összefüggések ismeretében megállapíthatjuk, hogy:

$$\frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x},$$

illetve, hogy:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}, \text{ és}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x = 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x = 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1}) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})].$$

Hogyan bizonyítható, hogy

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = \frac{e_o^o (1 + C^2)}{2} = \frac{e_o^o \left[1 + \left(\frac{\sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}}}{e_o^o} \right)^2 \right]}{2} =$$

$$= \frac{e_o^o \left[1 + \frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} \right]}{2} = \frac{e_o^o + \frac{e_o^o \left[\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2 \right]}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x}}{2} = ?$$

Az 1/2-del való szorzásnak, illetve a 2-vel való osztásnak az egyenlőség mindkét oldalán való egyidejű kiküszöbölése után a feladat a

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = e_o^o + \frac{e_o^o \left[\frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} \right]}{e_o^o}$$

egyenlőség fennforgásának bizonyításává egyszerűsödik. Vizsgáljuk meg külön az egyenlőség jobb oldalán szereplő összeg második tagjának számlálóját:

$$\begin{aligned} \frac{e_o^o \left[\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2 \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} &= \frac{e_o^o \left[\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x^2 - 2x e_o^o + e_o^{o2}) \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \\ &= \frac{e_o^o \left(\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x - 2 e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x d_x + e_o^{o2} \sum_{x=0}^{\omega} d_x \right)}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \\ &= \frac{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x - 2 e_o^{o2} \sum_{x=0}^{\omega} x d_x + e_o^{o3} \sum_{x=0}^{\omega} d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \\ &= \frac{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} - 2 e_o^{o3} + e_o^{o3} = \frac{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} - e_o^{o3} \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
 & \frac{e_o^o \left[\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2 \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = e_o^o + \frac{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} - e_o^{o3} \\
 & = \frac{e_o^{o3} + \frac{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} - e_o^{o3}}{e_o^{o2}} = \frac{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \\
 & = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} \cdot \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} .
 \end{aligned}$$

Következésképpen:

$$\frac{1}{2} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = \frac{e_o^o (1 + C^2)}{2} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_o^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_0^0) \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \bar{a}, \text{ vagyis}$$

$$g = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = e_o^o (1 + C^2) = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} =$$

$$= \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_o^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_o^{o'})]}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} .$$

$$e_o^o (1 + C^2) = e_o^o \left[1 + \left(\frac{\sqrt{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}}}{e_o^o} \right)^2 \right] = e_o^o + \frac{e_o^o \left[\sum_{x=0}^{\omega} d_x (x - e_o^o)^2 \right]}{e_o^o^2 \sum_{x=0}^{\omega} d_x}$$

egyenlő tehát a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség átlagos életkorának, illetve az általa még leélendő évek száma súlyozott átlagának kétszeresével ($2\bar{a}$), s ebből adódóan egyenlő a népesség átlagos halálozási korával ($\bar{g}$) is.

A stacionér népesség átlagos életkorával ($\bar{a}$) kapcsolatban befejezésül meg kell állapítanunk, hogy a valamely tetszőleges t időpontban megfigyelt stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) közelítő pontossággal egyenlő azon évek számával, mely alatt a népességet alkotó születési évjáratokban a továbbélők által leélt összes évek száma egyenlővé válik az általuk még leélendő összes évek számával ($x l_x = e_x^o l_x$, illetve $x L_x = e_x^{o'} L_x$), különbségük tehát zérussal lesz egyenlő ($x l_x - e_x^o l_x = 0$, illetve $x L_x - e_x^{o'} L_x = 0$). (Az x az l_x szorzójaként a leélt évek egzakt számát, az L_x szorzójaként a betöltött évek számát jelzi.)

A stacionér népesség átlagos életkorának megfelelő évek számával, vagyis $\bar{a}$, illetve $\bar{g}/2$ évvel a megfigyelés t -vel jelzett időpontja előtt születettek esetében ez az egyenlővé válás pontosan a megfigyelés t időpontjában következik be. A stacionér népességet alkotó egyes születési évjáratokban tehát a népesség átlagos életkoráig ($\bar{a}$ -éves korig) továbbélők esetében a már leélt évek és a még leélendő évek átlagos száma is egyenlővé válik egymással ($x = e_x^o$, illetve $x = e_x^{o'}$); ugyanis csak ebben az esetben válhat egyenlővé egymással a továbbélők által már leélt és még leélendő összes évek száma is ($x l_x = e_x^o l_x$, illetve $x L_x = e_x^{o'} L_x$). Könnyen belátható továbbá, hogy a stacionér népességet alkotó egyes születési évjáratokban a népesség átlagos életkoráig ($\bar{a}$ -éves korig) továbbélők esetében a már leélt és a még leélendő éveknek egymással egyenlő átlagos száma a népesség átlagos életkorával is egyenlő:

$$x = e_x^o = \bar{a} = \bar{g}/2, \quad \text{illetve} \quad x = e_x^{o'} = \bar{a} = \bar{g}/2 ,$$

vagyis ezen életkorig továbbélve:

$$x l_x = e_x^o l_x = \bar{a} l_x = \frac{\bar{g}}{2} l_x , \quad \text{ill.} \quad x L_x = e_x^{o'} L_x = \bar{a} L_x = \frac{\bar{g}}{2} L_x .$$

A fenti megállapítások közül legkönnyebben talán az látható be, hogy a stacionér népességet alkotó egyes születési évjáratokban (generációkban) a továbbélők által már leélt és az általuk még leélendő évek számának egyenlővé válása feltételezi az egy átlagos továbbélő által már leélt és az általa még leélendő évek számának egyenlővé válását is. Amennyiben a továbbélők által már leélt, és az általuk még leélendő évek számának különbségét az

$$y = e_x^0 l_x - x l_x ,$$

illetve

$$y = e_x^{0'} L_x - x L_x$$

függvény alakjában írjuk fel, e függvények l_x , illetve L_x szerinti deriváltjai az

$$y' = e_x^0 - x ,$$

illetve

$$y' = e_x^{0'} - x$$

alakban írhatók, és kétségtelen, hogy az

$$e_x^0 - x = 0 ,$$

illetve

$$e_x^{0'} - x = 0$$

egyenlőségek fennforgása feltételezi az

$$e_x^0 = x , \quad \text{illetve} \quad e_x^{0'} = x$$

egyenlőségek fennforgását is.

Külön kellene azonban bizonyítanunk, hogy az

$$x l_x = e_x^0 l_x = \bar{a} l_x = \frac{\bar{g}}{2} l_x ,$$

illetve

$$x L_x = e_x^{0'} L_x = \bar{a} L_x = \frac{\bar{g}}{2} L_x$$

egyenlőségek is fennállnak, vagyis, hogy

$$x = e_x^0 , \quad \text{ha} \quad x = e_x^0 = \bar{a} = \frac{\bar{g}}{2} ,$$

illetve

$$x = e_x^{0'} , \quad \text{ha} \quad x = e_x^{0'} = \bar{a} = \frac{\bar{g}}{2} .$$

Ez utóbbi egyenlőségek legegyszerűbben éppen annak alapján láthatók be, hogy

$$\bar{a} = \frac{\bar{g}}{2} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{T_0} =$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_0},$$

vagyis, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség átlagos életkora egyenlő a különböző korúak által leélendő átlagos élettartamok súlyozott számtani átlagával (az un. egy lakosra jutó életpotenciállal), amit korábban már bizonyítottunk.

A $\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x / T_0$ alakban felírt súlyozott számtani átlag ugyanis nemcsak a különböző korúak által leélendő átlagos élettartamok súlyozott számtani átlagát jelenti, hanem közelítő pontossággal az átlagos életkort elértek által várható átlagos élettartamot (e_a^0) is, vagy

$$\bar{a} = \frac{\bar{g}}{2} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_0} \approx \frac{T_a}{l_a} = \frac{\sum_{x=\omega}^{\bar{a}} L_x}{l_a} = \frac{l_a^o e_a^o}{l_a} = e_a^o,$$

ahol T_a az átlagos életkort elértek által összesen leélendő évek számát (valamint a stacionér népesség által évente az $\bar{a}$ -éves és ennél idősebb korokhoz tartozás állapotában leélt évek számát, és az $\bar{a}$ -éves és ennél idősebb stacionér népesség számát), l_a pedig az $\bar{a}$ -val jelzett átlagos életkorig továbbélők számát jelzi.

Fentiek alapján megállapítható, hogy valamely stacionér népesség átlagos életkora közelítőleg egyenlő az ezen átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartammal ($\bar{a} = \bar{g} \times e_a^0$).

Az a megállapításunk, hogy a stacionér népesség átlagos életkora közelítőleg egyenlő az átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartammal, összefüggésbe hozható Jean Bourgeois-Pichat francia demográfusnak azzal a Liebmann Hersch svájci demográfus által kidolgozott potenciális demográfia (53) kritikai értékelése során tett megállapításával, hogy valamely népesség életpotenciálja - közelítő pontossággal - az átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartamnak a népesség összlétszámával történő megszorzása útján is kiszámítható*, vagyis - a mi esetünkre alkalmazva

*Lásd J. Bourgeois-Pichat "Les limites de la démographie potentielle" című, a "Revue de l'Institut International de Statistique" 1951. évi 1. számában megjelent tanulmányában (13-27. p.).

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \approx T_o \frac{T_a}{l_a} = T_o \frac{\sum_{x=0}^{\bar{a}} L_x}{l_a} = T_o \frac{l_a e_a^o}{l_a} = T_o e_a^o,$$

amiből könnyen megérthető, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} \approx \frac{T_a}{l_a} = \frac{\sum_{x=0}^{\bar{a}} L_x}{l_a} = \frac{l_a e_a^o}{l_a} = e_a^o,$$

és bebizonyítottuk, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o}.$$

Jean Bourgeois-Pichat idézett megállapítása - mint ismeretes - nemcsak stacionér népességekre vonatkozik, helyességét lényegében az újabb vizsgálatok is igazolták.* Valamely népesség életpotenciáljának Bourgeois-Pichat által proponált módon való kiszámítása azért ad csak közelítő pontosságú eredményt, mert az x éves korban várható átlagos élettartam - mint azt idézett munkájában maga Bourgeois-Pichat is kifejti (55) - csupán közelítő pontossággal tekinthető az életkor (x) lineáris függvényének, vagyis az életkor előrehaladásával bekövetkező csökkenése csak közelítő pontossággal tekinthető lineárisnak. Ezért közelítő pontosságú csupán a már leélt és a még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának, a stacionér népesség átlagos életkorának (átlagos halálozási kora felének) és az átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartamnak az egybeesése is.

Idézett javaslatának kifejtése során Bourgeois-Pichat megállapítja, hogy amennyiben az x éves korban várható átlagos élettartam az életkor lineáris függvényének lenne tekinthető, a népesség ún. "átlagos potenciális életkora", vagyis a betöltött évek száma alapján x éves korban várható átlagos élettartamok súlyozott számtani átlaga - pontosan a népesség átlagos életkorával lenne egyenlő. Tételezzük fel - írja -, hogy a várható átlagos élettartam életkortól való függése a

$$v(x) = ax + b$$

alakban írható fel, ahol az a és b bizonyos állandókat jelentenek. Ebben az esetben a népesség életpotenciálja

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} v(x) L_x = \sum_{x=0}^{\omega} (ax + b) L_x =$$

* Lásd pl. dr. Egon Vielrose lengyel demográfus "Zarys demografii potencjalnej" című, a "Państwowe Wydawnictwo Naukowe" által 1958-ban Varsóban megjelentetett könyvét (54).

$$= a \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + b \sum_{x=0}^{\omega} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} L_x \left(a \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} + b \right) = T_o \left(a \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} + b \right) .$$

A zárójelben szereplő $\sum_{x=0}^{\omega} x L_x / \sum_{x=0}^{\omega} L_x$ hányados a népesség átlagos életkorát jelenti, a zárójelben levő teljes összeg pedig az átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartamot, vagyis:

$$e_{\bar{a}}^o = a \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} + b = a \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} + b .$$

A népesség életpotenciálja ennek alapján a

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} v(x) L_x = e_{\bar{a}}^o \sum_{x=0}^{\omega} L_x = e_{\bar{a}}^o T_o$$

alakban is felírható. Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} e_{\bar{a}}^o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} v(x) L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} v(x) L_x}{T_o} , \end{aligned}$$

vagyis, hogy az átlagos életkor elérésekor várható átlagos élettartam ($e_{\bar{a}}^o$) egyenlő a betöltött évek száma alapján x éves korban várható átlagos élettartamok ($e_x^{o'}$) súlyozott számtani átlagával, s ez utóbbi - mint korábban bizonyítottuk - stacionér népesség esetében egyenlő a népesség átlagos életkorával ($\bar{a} = \bar{g}/2$).

Stacionér népességben tehát

$$\bar{a} = \frac{1}{2} \bar{g} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} \approx e_{\bar{a}}^o .$$

Kimutattuk azt is, hogy a stacionér népességet alkotó születési kohorszok továbbéltői (illetve egy átlagos továbbéltője) és meghaltjai esetében közelítőleg éppen az átlagos életkor elérésekor válik egymással egyenlővé a már leélt évek és a még leélendő évek száma.

3. A stacionér népesség tulajdonságai között fennálló kapcsolatok körének kibővítése az átlagos életkorára és átlagos halálozási korára vonatkozó különféle meghatározások alapján

A stacionér népesség tulajdonságai között fennálló kapcsolatok köre részint az általa már leélt és az általa még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó tétel, és az átlagos életkorának, valamint átlagos halálozási korának ebből adódó viszonylag egyszerű meghatározása, részint ez utóbbi korok Ryder vonatkozó formuláin alapuló meghatározásainak felhasználásával gyarapítható.

A hagyományos formulák a stacionér népesség létszámának (T_0) meghatározására - melyek számát már értekezésünk előző fejezetében is jelentősen bővítettük - a következők:

$$\begin{aligned}
 T_0 &= l_0 e_0^0 = l_0 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{\frac{l_x}{l_0} + \frac{l_{x+1}}{l_0}}{2} \right) = l_0 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2 l_0} \right) = l_x \sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_0} = \\
 &= l_0 \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p = \frac{l_0}{b} = \frac{l_0}{d} = \\
 &= e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} d_x = \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} d_x \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{\frac{l_x}{l_0} + \frac{l_{x+1}}{l_0}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} d_x \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2 l_0} \right) = \\
 &= \sum_{x=0}^{\omega} d_x \sum_{x=0}^{\omega} \frac{l_x}{l_0} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}{b} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}{d} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_x + \sum_{x=0}^{x=x} L_x = \\
 &= \sum_{x=0}^{\omega} x d_x .
 \end{aligned}$$

A stacionér népesség e fejezet előző pontjában demonstrált új tulajdonságai lehetővé teszik, hogy - többek között - e népesség létszámát is az eddigiektől eltérő módszerekkel határozzuk meg. Könnyen belátható például, hogy valamely tetszőleges t időpontban megfigyelt stacionér népesség létszáma az ezen népességet alkotó születési évjáratok által leélt összes évek számának egy születési évjáratra jutó hányadaként is felfogható. Minthogy t időpontban megfigyelt stacionér népességet alkotó n számú születési évjárat által összesen

leélt évek száma a megfigyelés időpontjáig leélt és a megfigyelés időpontja után leélt évek számából tevődik össze:

$$\begin{aligned}
 T_o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{n} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{n} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{n} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{n} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{n} = \text{stb.}
 \end{aligned}$$

Minthogy a t időpontban megfigyelt stacionér népességet alkotó születési évjáratok n -nel jelzett száma egyenlő a létező életkorok számával, mely utóbbi a létező legmagasabb életkor ($x_{\max}$) és a 0 éves kor összegével ($x_{\max} + 1$) egyenlő ($n = x_{\max} + 1$), a fenti formulák a következőképpen is írhatók:

$$\begin{aligned}
 T_o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{x_{\max} + 1} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{x_{\max} + 1} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{x_{\max} + 1} = \\
 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{x_{\max} + 1} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{x_{\max} + 1} = \text{stb.}$$

Figyelembe véve továbbá a stacionér népességnek azt a jellemzőjét, hogy azok a születési évjáratok, melyeknek továbbélői a t időpontban megfigyelt népességet alkotják, az általuk még leélendő évek számát ugyanannyi idő (naptári év) alatt élik le, mint amennyi idő (naptári év) alatt a továbbélők és a meghaltak a t időpontig már leélt évek számát leélték megállapíthatjuk, hogy a stacionér népesség létszáma az általa összesen leélt évek számának és azon naptári évek száma felének hányadosaként is meghatározható, mely alatt a népességet alkotó születési évjáratok az összes évek számát leélik. Ez utóbbi évek száma (N) a népességet alkotó születési évjáratok számának, illetve a népességben előforduló életkorok számának kétszeresével egyenlő:

$$N = 2n = 2(x_{\max} + 1)$$

és

$$n = x_{\max} + 1 = N/2, \text{ vagyis}$$

$$\begin{aligned} T_o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\frac{N}{2}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\frac{N}{2}} = \text{stb.} \end{aligned}$$

A fentiekből az is kitűnik, hogy:

$$\begin{aligned}
 T_o &= \frac{2 \left[\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right]}{N} = \\
 &= \frac{2 \left\{ \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right\}}{N} = \\
 &= \frac{2 \left\{ \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[(L_x (x + e_x^{o'})) \right] \right\}}{N} = \\
 &= \frac{2 \left\{ \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x \right\}}{N} = \\
 &= \frac{2 \left\{ \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x \right\}}{N} = \text{stb.}
 \end{aligned}$$

Minthogy az N számú naptári év alatt leélt összes évek száma csak akkor egyenlő a t időpontban megfigyelt stacionér népesség, illetve az ezen népességet alkotó születési évjáratok által leélt évek számának kétszeresével, ha a megfigyelés t időpontját megelőző N számú naptári év alatt az ezen időpontot követő N számú naptári év alatt született évjáratok mindegyikében ugyanakkora volt az összesen leélt évek száma, és ugyanolyan volt ez utóbbiak életkor szerinti megoszlása, mint a t időpontban megfigyelhető évjáratok esetében, megállapíthatjuk, hogy a stacionér népesség t időpontbeli létszáma is csak ebben az esetben fogható fel az ezen időpontot megelőző $N/2$ számú és az ezt követő $N/2$ számú naptári év alatt valamennyi születési évjárat (tehát nemcsak a t időpontbeli stacionér népességet alkotó évjáratok) által leélt összes évek száma és az N számú naptári év hányadosaként is.

Könnyen belátható azonban, hogy a stacionér népesség létszáma (T_o) többek között egyenlő egyrészt: az általa már leélt összes év, illetve: az általa még leéleendő összes év és az átlagos életkora ($\bar{a}$) hányadosával, másrészt: az általa már leélt összes év és az általa még leéleendő összes év és az átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) hányadosával:

$$T_o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\bar{a}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\bar{a}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{\bar{a}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\bar{a}} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\bar{a}} = \frac{\frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right]}{\bar{a}} = \text{stb.},$$

illetve:

$$\begin{aligned} T_o &= \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\bar{g}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\bar{g}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{\bar{g}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\bar{g}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\bar{g}} = \frac{e_o^o (1 + C^2) T_o}{\bar{g}} = \text{stb.} \end{aligned}$$

E formulák felhasználásával a stacionér népesség átlagos életkorának ($\bar{a}$) is számos új meghatározása adható:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o e_o^o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{\frac{1}{l_o} + \frac{1}{l_{x+1}}}{2} \right)} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{\frac{1}{l_o} + \frac{1}{l_{x+1}}}{2} \right)} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o \sum_{x=0}^{\omega} \frac{1}{l_o}} = \\ &= \frac{b \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o} = \frac{d \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{\frac{1}{l_o} + \frac{1}{l_{x+1}}}{2} \right)} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{\frac{1}{l_o} + \frac{1}{l_{x+1}}}{2} \right)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x \sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_o}} = \frac{b \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{d \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{l_x + l_{x+1}}{2} \right)} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_x + \sum_{x=0}^{\omega} L_x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x} = \frac{n \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{n \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{n \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]} =$$

$$= \frac{n \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x} =$$

$$= \frac{n \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{(x_{\max} + 1) \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{(x_{\max} + 1) \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{(x_{\max} + 1) \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]} =$$

$$= \frac{(x_{\max} + 1) \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x} =$$

$$= \frac{(x_{\max} + 1) \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{\frac{N}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} (T_o - e_x^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{\frac{N}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_o - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{N}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x \\
= & \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{2} = \\
& \frac{\frac{N}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x} = \\
& \frac{\frac{N}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_0 - e_x^{o'} L_x) - x L_x \right] + 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} = \\
= & \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{2 T_0} = \frac{L_x (x + e_x^{o'})}{2 T_0} = \\
= & \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{2 T_0} = \frac{e_0^o (1 + C^2)}{2} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

A fenti formulák alapulvételével viszonylag könnyen definiálhatók a stacionér népesség átlagos halálozási korának ($\bar{g}$) kiszámítására szolgáló további formulák is annak figyelembevételével, hogy a stacionér népesség átlagos halálozási kora átlagos életkorának kétszerese ($\bar{g} = 2\bar{a}$).

A kifejtettek alapján megállapítható, hogy:

- a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt összes évek száma, illetve: az általa még leélendő összes évek száma egyenlő az átlagos életkorának ($\bar{a}$) és összlétszámának (T_0) szorzatával:

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_0^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_0^{o'}) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x = \frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right] = \bar{a} T_o = \bar{a} \sum_{x=0}^{\omega} L_x =$$

$$= \bar{a} \sum_{x=0}^{\omega} x d_x = \bar{a} l_o e_o^o = \bar{a} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x = \text{stb.};$$

- a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség által már leélt összes évek száma, és az általa még leélendő összes évek száma egyenlő az átlagos halál-
lozási korának ($\bar{g}$) és összlétszámának (T_o) szorzatával:

$$2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x = 2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1}) = \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right] =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x = e_o^o (1 + C^2) T_o = \bar{g} T_o = \bar{g} \sum_{x=0}^{\omega} L_x = \bar{g} \sum_{x=0}^{\omega} x d_x =$$

$$= \bar{g} l_o e_o^o = \bar{g} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} d_x = \text{stb.};$$

- a stacionér népesség születésszáma (l_o) többek között egyenlő egyrészt: az általa már leélt összes év, illetve az általa még leélendő összes év és az átlagos életkora a születéskor várható átlagos élettartammal alkotott szorzatának ($\bar{a} e_o^o$) hányadosával, másrészt: az általa már leélt összes év és az általa még leélendő összes év és az átlagos halál-
lozási kora a születéskor várható átlagos élettartammal alkotott szorzatának ($\bar{g} e_o^o$) hányadosával:

$$l_o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\bar{a} e_o^o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\bar{a} e_o^o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{\bar{a} e_o^o} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\bar{a} e_o^o} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\bar{a} e_o^o} = \frac{\frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right]}{\bar{a} e_o^o} = \text{stb.},$$

illetve:

$$l_o = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\bar{g} e_o^o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\bar{g} e_o^o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{\bar{g} e_o^o} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\bar{g} e_o^o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\bar{g} e_o^o} = \frac{e_o^o (1 + C^2) T_o}{\bar{g} e_o^o} = \text{stb.}$$

- a stacionér népesség meghaltjainak átlagos életkora, vagyis a születéskor várható átlagos élettartam (e_o^o) többek között egyenlő egyrészt: az általa már leélt összes év, illetve az általa még leélendő összes év, és az átlagos életkora az évi születésszámmal (vagy a halálozások évi számával) alkotott szorzatának

$$(\bar{a} l_o, \text{ illetve } \bar{a} \sum_{x=0}^{\omega} d_x)$$

hányadosával, másrészt: az általa már leélt összes év és az általa még leélendő összes év, és az átlagos halálozási kora az évi születésszámmal alkotott szorzatának

$$(\bar{g} l_o, \text{ illetve } \bar{g} \sum_{x=0}^{\omega} d_x)$$

hányadosával:

$$e_o^o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\bar{a} l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\bar{a} l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{\bar{a} l_o} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\bar{a} l_o} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\bar{a} l_o} = \frac{\frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right]}{\bar{a} l_o} = \text{stb.},$$

illetve:

$$e_o^o = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\bar{g} l_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{\bar{g} l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{\bar{g} l_o} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{\bar{g} l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{\bar{g} l_o} = \frac{e_o^o (1 + C^2) T_o}{\bar{g} l_o} = \text{stb.},$$

ez utóbbi reciprokával egyenlő nyers születési arányszáma (b) és nyers halálozási arányszáma (d) tehát többek között az alábbi formulákkal is becsülhető:

$$b = d = \frac{1}{e_o^o} = \frac{\bar{a} l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x} = \frac{\bar{a} l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} = \frac{\bar{a} l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\bar{a} \, l_o}{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]} = \frac{\bar{a} \, l_o}{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x} = \\
&= \frac{\bar{a} \, e_o^o}{\frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right]} = \text{stb.},
\end{aligned}$$

illetve:

$$\begin{aligned}
b = d = \frac{1}{e_o^o} &= \frac{\bar{g} \, l_o}{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x} = \frac{\bar{g} \, l_o}{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} = \frac{\bar{g} \, l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})} = \\
&= \frac{\bar{g} \, l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]} = \frac{\bar{g} \, l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x} = \frac{\bar{g} \, l_o}{e_o^o (1 + C^2) T_o} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

Az az ismert tény tehát, hogy stacionér népességben a meghaltak átlagos életkora, vagyis a születéskor várható átlagos élettartam (e_o^o) és a nyers születési, illetve halálózási arányszám szorzata mindig egyenlő eggyel, többek között az alábbi összefüggések alapján is belátható:

$$\begin{aligned}
e_o^o b = e_o^o d &= \frac{e_o^o \bar{a} \, l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x} = \frac{e_o^o \bar{a} \, l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} = \frac{e_o^o \bar{a} \, l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}} = \\
&= \frac{e_o^o \bar{a} \, l_o}{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]} = \frac{e_o^o \bar{a} \, l_o}{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x} = \\
&= \frac{e_o^o \bar{a} \, l_o}{\frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right]} = 1,
\end{aligned}$$

illetve:

$$e_o^o b = e_o^o d = \frac{e_o^o \bar{g} l_o}{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x} = \frac{e_o^o \bar{g} l_o}{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x} = \frac{e_o^o \bar{g} l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})} =$$

$$= \frac{e_o^o \bar{g} l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]} = \frac{e_o^o \bar{g} l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x} = \frac{e_o^o \bar{g} l_o}{e_o^o (1 + C^2) T_o} = 1,$$

amiben a fenti törtek számlálójának és nevezőjének egyenlősége is kifejezésre jut.

A fentiek alapján a stacionér népesség átlagos életkorának ($\bar{a}$) és ugyanazon stacionér népesség meghaltjai átlagos életkorának, vagyis a születéskor várható átlagos élettartamnak (e_o^o) szorzata ($\bar{a} e_o^o$) egyenlő az általa már leélt összes évek számának, illetve az általa még leélendő összes évek számának és az elveszületések (illetve a halálozások) évi

számának ($l_o = \sum_{x=0}^{\omega} d_x$) hányadosával:

$$\bar{a} e_o^o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{l_o} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{l_o} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{l_o} = \frac{\frac{1}{2} \left[e_o^o (1 + C^2) T_o \right]}{l_o} = \text{stb.},$$

átlagos halálozási korának ($\bar{g}$) és meghaltjai átlagos életkorának, vagyis a születéskor várható átlagos élettartamnak (e_o^o) szorzata ($\bar{g} e_o^o$) pedig egyenlő az általa már leélt összes évek számának és az általa még leélendő összes évek számának és az elveszületések (illet-

ve a halálozások) évi számának ($l_o = \sum_{x=0}^{\omega} d_x$) hányadosával:

$$\bar{g} e_o^o = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{l_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_x + T_{x+1})}{l_o} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x (x + e_x^{o'})}{l_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{l_o} = \frac{e_o^o (1 + C^2) T_o}{l_o} = \text{stb.}$$

A mellékelt 3.1. és 3.2. tábla felhasználásával a stacionér népességnek a fentiekben vázolt jellemzői és a közöttük fennálló kapcsolatok a hazánkban századunk eleje óta tartott népszámlálások, valamint az ezeket megelőző és követő egy-egy év halandósági adatainak alapján kiszámított halandósági táblák felhasználásával végzett becslési eredmények alapján közelítő pontosságu eredményeket adó számítások útján is ellenőrizhetők. E táblák alapján azonban - Ryder-nak a Coale-Demény-féle, nyugati típusu halandósági táblák (26) alapulvételével végzett hasonló megfigyelései analógiájára (46) - a következő igen érdekes kapcsolatok és tendenciák állapíthatók meg:

1. A halandósági korok szórási mutatójának (D) értéke a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^o) szóródása terjedelmének bizonyos szakaszáig (a női népesség esetében csaknem a feléig) a születéskor várható átlagos élettartammal együtt nő, majd csökken, vagyis a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^o) alakulásával ellentétes irányban változik. A halálozási korok szórásának (D) ez a jellegzetessége a táblabeli halálozások (d_x) kor szerinti megoszlásának bimodális (kétmódusos) jellegével függ össze. Az átlagos élettartam (e_0^o) növekedésével a csecsemőkori módusz értéke csökken, az öregkorié pedig általában nő, a 10-15 év közötti legalacsonyabb értékek alatti és feletti halálozások aránya előbb a kiegyenlítettebb kor szerinti megoszlás (vagyis nagyobb szórás), majd - az átlagos élettartam (e_0^o) további növekedésével - az öregkori módusz körüli koncentráltabb kor szerinti megoszlás (vagyis kisebb szórás) felé halad.

3.1. A stacionér népességek néhány jellemzője és az e jellemzők közötti főbb kapcsolatok

Magyarország férfi népességének halandósági táblái alapján*

A halandósági tábla éve	A meghaltak átlagos életkora, ill.: a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^o) (év)	A már leélt, illetve a még leélendő évek száma (év)	A már leélt, és a még leélendő évek száma (év)	A halálozási korok szórása (D)	A halálozási korok szóródási együtthatójának (variációs koeficiensének) értéke (C) (év)	A népesség átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) (év)	A népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) (év)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1900/1901	36,56	116 859 940	233 719 880	31,63	0,8652	63,93	31,97
1910/1911	39,07	125 402 420	250 804 840	31,33	0,8019	64,19	32,10
1920/1921	41,04	134 144 608	268 289 216	31,60	0,7700	65,37	32,69
1930/1931	48,70	166 536 373	333 072 746	30,97	0,6359	68,39	34,20
1941	54,95	192 366 007	384 732 014	28,77	0,5236	70,01	35,01
1948/1949	58,75	209 621 483	419 242 966	27,22	0,4633	71,36	35,68
1959/1960	65,38	236 574 774	473 149 548	21,98	0,3372	72,59	36,30
1969/1970	66,51	241 058 583	482 117 166	19,94	0,2998	72,49	36,25

* Valamennyi halandósági tábla esetében $l_0 = 100\ 000$.

Forrás: Számításaink Pallós Emil: Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig (a KSH Népeségtudományi Kutató Intézetének 34. sz. közleménye, Budapest, 1971.) c. kiadványának, valamint Magyarország népességének 1969-1970. évi halandósági tábláját tartalmazó kéziratának felhasználásával készültek.

3.2. A stacionér népességek néhány jellemzője
és az e jellemzők közötti főbb kapcsolatok

Magyarország női népességének halandósági táblái alapján^{*}

A halandósági tábla éve	A meghaltak átlagos életkora, ill.: a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) (év)	A már leélt, illetve a még leélen-dő évek száma (év)	A már leélt és a még leélendő évek száma (év)	A halálozási korok szórása (D)	A halálozási korok szóródási együtthatójának (variációs koeficiensének) értéke (C) (év)	A népesség átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) (év)	A népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) (év)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1900/1901	38,15	120 941 605	241 883 210	31,04	0,8136	63,40	31,70
1910/1911	40,48	131 014 728	262 029 456	31,33	0,7740	64,73	32,37
1920/1921	43,12	142 957 611	285 915 222	31,62	0,7333	66,31	33,16
1930/1931	51,80	180 800 489	361 600 978	30,54	0,5896	69,81	34,91
1941	58,24	209 603 074	419 206 148	28,29	0,4857	71,98	35,99
1948/1949	63,24	234 970 444	469 940 888	26,46	0,4184	74,31	37,16
1959/1960	69,57	263 837 296	527 674 592	20,90	0,3004	75,85	37,93
1969/1970	72,11	277 352 457	554 704 914	18,63	0,2584	76,92	38,46

^{*} Valamennyi halandósági tábla esetében $l_0 = 100\ 000$.

Forrás: Számításaink Pallós Emil: Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig (a KSH Népeségtudományi Kutató Intézetének 34.sz. közleménye, Budapest, 1971.) c. kiadványának, valamint Magyarország népességének 1969-1970.évi halandósági tábláját tartalmazó kéziratának felhasználásával készültek.

2. Szembetűnő, hogy a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) növekedése a halálozási korok szóródási együtthatója (variációs koeficiensé) mutatója (C) értékének csökkenésével jár együtt. A kapcsolat e két mutató értékének ellentétes irányú változása között csaknem lineárisnak tekinthető. Ezzel függ össze, hogy a halálozási korok szóródási együtthatójának (variációs koeficiensének) értékei az azonos időszakok adatai alapján számított halandósági táblák esetében is alacsonyabbak a női, mint a férfi népesség esetében, s ez a különbség a születéskor várható átlagos élettartam növekedésével együtt növekedni látszik.

3. Kimutatható az is, hogy a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) növekedésével és a halálozási korok szóródási együtthatója (variációs koeficiensé) értékének ezzel együttjáró csökkenésével nő a stacionér népesség átlagos életkora és átlagos halálozási kora is. A legmagasabb, születéskor várható átlagos élettartam-értékek, illetve a legalacsonyabb szóródási együttható-értékek esetében az átlagos életkor csaknem eléri a születéskor várható átlagos élettartamnak, vagyis a stacionér népesség meghaltjai átlagos életkorának felét. Pontosan a fele csak abban az esetben lehetne, ha mindenki ugyanabban az életkorban halna meg. Ekkor a népesség átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) azonosulna a születéskor várható átlagos

gos élettartammal, vagyis a meghaltak átlagos életkorával (e_0^0). Ez a valóságban természetesen nem fordulhat elő.

4. Stacionér népességek statisztikai középértékekkel jellemezhető néhány további tulajdonságának ismert tulajdonságaik változásával együttjáró módosulása

Értekezésünk e fejezetének előző pontjában többek között áttekintettük a stacionér népesség meghaltjainak átlagos életkora, vagyis a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0), valamint a stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) és átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) közötti főbb, matematikailag is definiálható kapcsolatokat, továbbá a 3.1. és 3.2. tábla adatai alapján azt is, hogy miként módosul a stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) és átlagos halálozási kora ($\bar{g}$) a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) változásának hatására. Valamely adott, kialakult stacionér népességben e mutatók értékei időben változatlanok, állandók; a századunk kezdete óta tartott magyarországi népszámlálások, valamint az ezeket megelőző és követő egy-egy év halandósági adatainak felhasználásával kiszámított halandósági táblák alapján becsült értékeik tehát - többek között - ama stacionér népességek vonatkozó mutatóinak értékeiként értelmezendők, melyek akkor alakulnának ki, ha:

1. a szóban forgó halandósági táblák által leírt halandóság időbelileg állandósulna;
2. ezzel egyidejűleg a termékenységek olyan korspecifikus jellemzői alakulnának ki és állandósulnának, melyek a női népesség adott halandósága mellett biztosítanák a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi értékének kialakulását, stb. (lásd az előző fejezet 1. pontjában a stacionér népesség kialakulásának feltételeiről kifejtetteket).

Az alábbiakban értekezésünk e fejezetének előző pontjában is felhasznált magyarországi halandósági táblák alapján a stacionér népességek statisztikai középértékekkel jellemezhető néhány további tulajdonságának ismert tulajdonságaik változásával együttjáró módosulásáról fogunk áttekintést adni annak az ismételten hangsúlyozásával, hogy a valamely halandósági táblabeli stacionér népesség statisztikai középértékekkel jellemezhető tulajdonságainak valamely más halandósági táblabeli stacionér népesség vonatkozó tulajdonságaivá történő átalakulása sohasem csupán a halandóság, hanem - a népesség zártsága esetében - a termékenység megváltozását stb. is feltételezi, ha ez utóbbira, legalábbis explicit módon, a továbbiakban nem is fogunk kitérni.

Az esetleges félreértések elkerülése érdekében előadott fenti megjegyzések előrebocsátása után mondanivalónkat a felhasznált halandósági táblák alapján számítható statisztikai középértékek meghatározása, kiszámítási és ábrázolási módjának bemutatása, valamint az egyes halandósági táblákban belüli és az egyes halandósági táblák közötti értékek egybevetése formájában fogjuk kifejteni. A hangsúly ennek alkalmával a halandóság táblamódszerű elemzése során tradicionálisan használt statisztikai középértékek ujonnan feltárt statisztikai középértékekkel történő kiegészítésén, ez utóbbiaknak a tradicionálisan használtakkal és egymással való egybevetésén lesz.

A halandóság táblamódszerű elemzésében a három leggyakrabban használt statisztikai középérték: a súlyozott számtani átlag, a medián és a módusz eddig is igen jelentős szerephez jutott. A halandósági tábla meghaltjainak átlagos életkorán, illetve a születéskor várható átlagos élettartamon (súlyozott számtani átlag), az újszülöttek valószínű élettartamán, illetve elhalálozási korán (medián) és az un. normálkoron (módusz) kívül azonban a halandóság szintjének változása számos egyéb olyan mutató értékének változásával is jellemezhető, melyeknek zöme szintén statisztikai középérték. Ilyen a halandósági tábla stacionér népességének átlagos életkora és ennek kétszerese: a halandósági tábla stacionér népességének átlagos halálozási kora (súlyozott számtani átlagok), melyekre az eddigiek során már eléggé részletesen kitértünk. Ilyenek továbbá:

- a továbbélők és a meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora;
 - a továbbélők által már leélt, valamint a meghaltak által leélt és a továbbélők által leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora;
 - a meghaltak által már leélt és a továbbélők által már leélt és még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora;
 - a továbbélők által már leélt és az általuk még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora;
 - a meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora;
 - a továbbélők által leélt és a meghaltak által leélt évek száma egyenlővé válásának életkora;
 - egy átlagos továbbélő által már leélt és még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora (az izometrikus életkor);
 - a halandósági tábla stacionér népessége által összesen leélendő évek száma feleződésének életkora (a "centre vital");
- melyek medián, illetve kvázi-medián típusu mutatóknak tekinthetők.

Ilyen végül a továbbélők által leélt évek száma maximálissá válásának életkora, mely a modális életkorok egy fajtájaként is felfogható.

E mutatók némelyike önmagában véve is igen érdekes és értékes mutatója a halandósági táblának. Ilyen például az egy átlagos továbbélő által már leélt és az általa még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora (az izometrikus életkor), mely "életünk delelője" életkoraként is felfogható. Számos nagyjelentőségű alkalmazási lehetősége van azonban nemcsak az ilyen, hanem az összes többi, általunk javasolt, ujonnan feltárt statisztikai középértéknek is: a felneveltetési költségek halandóságból adódó többletének becslése és számos egyéb gazdaságdemográfiai elemzés és számítás elképzelhetetlen például a to-

vábbélők és a meghaltak által leélt évek száma, az életkor előrehaladásával kapcsolatos alakulásának ismerete és figyelembevétele nélkül.

A teljesség kedvéért tekintsük át a halandósági tábla alapján számítható hagyományos középértékek alakulását is Magyarország férfi és női népességének a századunk kezdete óta tartott hazai népszámlálások, valamint - az 1941. évi halandósági tábla kivételével - az ezeket megelőző és követő egy-egy év halandósági adatainak felhasználásával kiszámított halandósági táblák alapján (3.3. tábla három első sora). Más szerzők hasonló elemzésének eredményeivel (49, 50, 51) teljes összhangban megállapítható, hogy:

1. A születéskor várható átlagos élettartam, vagyis a halandósági tábla meghaltjainak átlagos életkora a férfi, és a férfiakénál kedvezőbb halandóságu női népesség esetében egyaránt a halandósági táblák által leírt minden halandósági színvonal esetében kisebb az ujszülöttek valószínű élettartamánál (és elhalálozási koránál), és - természetesen - kisebb a halálozások öregkori modális életkoránál, vagyis az un. normálkornál is. A valószínű élettartam értéke - mint ismeretes - azért nagyobb a születéskor várható átlagos élettartamnál az ujszülöttek valószínű élettartama (és elhalálozási kora) esetében is, mert

- a valószínű élettartamnál magasabb életévekben az életkor előrehaladásával a kihalás üteme meggyorsul;

- a várható átlagos élettartam az adott életkort - adott esetben a 0 éves egzakt életkort - követő egész halandóságot figyelembe veszi, a valószínű élettartam pedig csak a medián korig, adott esetben az ujszülöttek fele kihalásának életkoráig terjedő halandósággal számol. Ez utóbbi miatt tekintjük egyébként a születéskor várható átlagos élettartam értékét a halandósági szint jellemzése szempontjából nagyobb informatív értékűnek, mint az ujszülöttek valószínű élettartamát (és elhalálozási korát).

2. A halálozások öregkori modális életkora, vagyis az un. normálkor a férfi, és a férfiakénál kedvezőbb halandóságu női népesség esetében egyaránt minden halandósági szint esetében nemcsak a születéskor várható átlagos élettartamnál, hanem az ujszülöttek valószínű élettartamánál (és halálozási koránál) is magasabb és - mint ismeretes - a halandósági szintnek a születéskor várható átlagos élettartam növekedésében kifejezésre jutó süllyedésére jóval kevésbé érzékenyen reagál, mint az ujszülöttek valószínű élettartama (és elhalálozási kora), sőt nem is növekszik minden esetben, amikor a születéskor várható átlagos élettartam nő.

3. A halandósági szintnek a születéskor várható átlagos élettartam növekedésében kifejezésre jutó süllyedésével a halandósági tábla alapján számítható három hagyományos statisztikai középérték - a férfi, és a férfiakénál kedvezőbb halandóságu női népesség esetében egyaránt - egyre közelebb kerül egymáshoz.

A fenti, eléggé általánosan ismert következtetések természetesen meg is magyarázhatók, értékezésünknek azonban nem a halandósági tábla alapján számítható hagyományos középértékek közötti nagyságrendi relációk elemzése a célja.

Megjegyezzük, hogy a születéskor várható átlagos élettartam, vagyis a halandósági tábla meghaltjai átlagos életkorának (e_o^0) kiszámítására a matematikailag diszkrét formában felírt, azonos eredményt adó, részint az előzőek során is bemutatott alábbi formulák bármelyike használható:

$$e_o^0 = \frac{0,5 l_o + \sum_{x=1}^{\omega} l_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{x=1}^{\omega} l_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{T_o}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x},$$

ahol l_o a tábla ujszülöttjeinek, l_x az x éves egzakt életkorig továbbélőinek számát, L_x a betöltött éveik száma alapján x éves táblabeli stacionér népesség létszámát, illetve az x évesen leélendő évek számát, T_o a tábla ujszülöttjei (l_o) által leélendő összes évek számát, illetve a táblabeli stacionér népesség összlétszámát, d_x pedig a betöltött éveik száma alapján x éves korukban meghaltaknak a halandósági táblabeli számát jelenti. A szükséges információk rendelkezésre állása esetén felhasználhatók e célra természetesen az előzőek során bemutatott, illetve levezetett összes egyéb formulák is.

Az ujszülöttek valószínű élettartamának (és elhalálozási korának) meghatározása ama szokásos egyszerűsítő feltevésen alapult, hogy a halálozások a szomszédos korévek között egyenletesen oszlanak meg. Ebben az esetben az az életkor, amelyig haladva az ujszülöttek fele kihal

$$l_o^{me} = x + \frac{l_x - \frac{l_o}{2}}{l_x - l_{x+1}},$$

ahol l_x és l_{x+1} a halandósági tábla továbbélési rendjének azt a két szomszédos értékét jelenti, mely közé az

$$l_o/2 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x/2$$

élettartam csak az ujszülöttek esetében esik egybe elhalálozásuk valószínű életkorával, a bizonyos életkort már elérték esetében különbséget kell tennünk a még várható valószínű élettartamuk és elhalálozásuk valószínű életkora között. Ez utóbbi kiszámítása az ujszülöttek valószínű élettartamának, s egyben valószínű elhalálozási korának kiszámításával analóg módon, az előbbié pedig a már leélt évek számának a valószínű elhalálozási korból való kivonása útján történik. Az ujszülöttek valószínű élettartamának (és elhalálozási korának) grafikus módszerrel történő meghatározása és ábrázolása csaknem kizárólag a mellékelt III. 6/a. ábra által szemléltetett módon történik. A III. 6/b. ábra a számos egyéb grafikus módszerrel történő megoldási és ábrázolási mód közül azt szemlélteti, mely az

$$y = l_x - \sum_{x=0}^{x=x} d_x,$$

függvény a kortengellyel alkotott metszéspontjának (zérus helyének) a meghatározásán alapszik. Ez a függvény azt írja le, hogyan alakul a továbbélők és a meghaltak számának a kü-

lönbsége az életkornak az előrehaladásával, a kortengellyel alkotott metszéspontja tehát értelemszerűen azt az életkort jelzi, amelyig haladva a továbbélők száma azonosul a már

meghaltak számával $(l_x - \sum_{x=0}^{x=x} d_x = 0)$, vagyis a tábla ujszülötteinek a száma

$$(l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x) \text{ a halálozások következtében a felére csökken.}$$

Mindkét ábra a férfi és a nő népesség 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblájának a felhasználásával készült s előrebecsátjuk, hogy ezeknek a halandósági tábláknak a felhasználásával készültek e fejezet e pontjának az összes többi ábrái is.

A táblabeli halálozások öregkori modális életkorának (a normálkornak) a meghatározása az

$$x_n = x_m + \frac{d_m - d_{m-1}}{2 d_m - d_{m+1} - d_{m-1}}$$

formula segítségével történt, melyhez x_m a legnagyobb öregkori d_x értékhez tartozó kor-év, d_m a legnagyobb, d_{m-1} az ezt megelőző, d_{m+1} pedig az ezt követő öregkori d_x érték.

A halandósági tábla alapján számítható további középértékek fogalma kiszámítási és ábrázolási módja megértésének megkönnyítése céljából ábrázoljuk a továbbélők számának az életkor előrehaladásával kapcsolatos alakulását leíró l_x görbét a derékszögű sík koordináta rendszer I. síknegyedében (lásd a III. b/a. ábrát) és vegyünk fel egy tetszőleges pontot a 0 éves egzakt életkor és a továbbélők számának zérussá válását jelző ω éves kor közötti intervallumában. Jelöljük ezt a pontot x -szel és huzzunk e ponton át egy, az ordináta tengellyel párhuzamos egyenest, majd ez utóbbinak a l_x görbével alkotott metszéspontján át egy, az abszcissza tengellyel párhuzamos egyenest. Ilymódon a l_x görbe és a koordináta tengelyek által határolt, a táblabeli stacionér népesség által leélt összes éveknek a számát

$$\left(\sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_0 \right) \text{ szimbolizáló összterületet három részre osztottuk fel, melyek közül a para-}$$

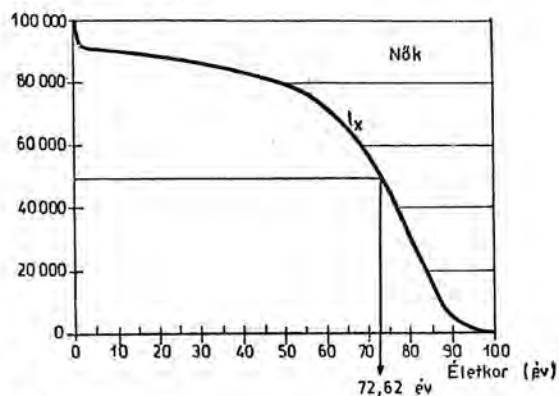
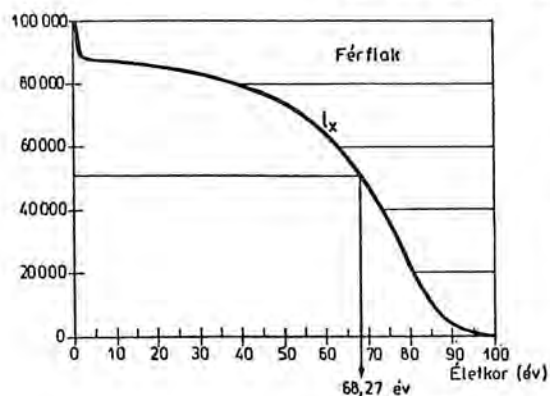
lelogramma alakú az általunk felvett x éves egzakt életkorig továbbélők által leélt éveknek a számát ($x l_x$), az e fölötti az általunk felvett x éves egzakt életkorig meghaltak által leélt

éveknek a számát $\left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right)$, az e kettőtől jobbra eső pedig az általunk felvett x éves

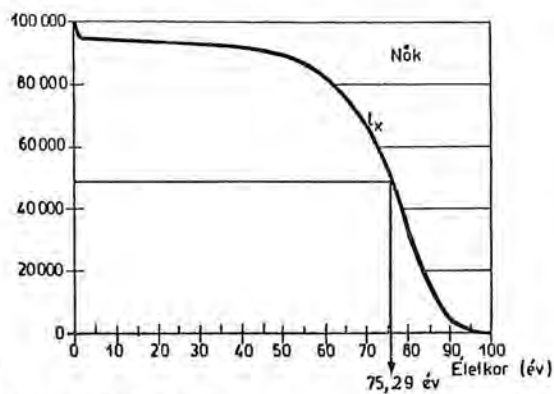
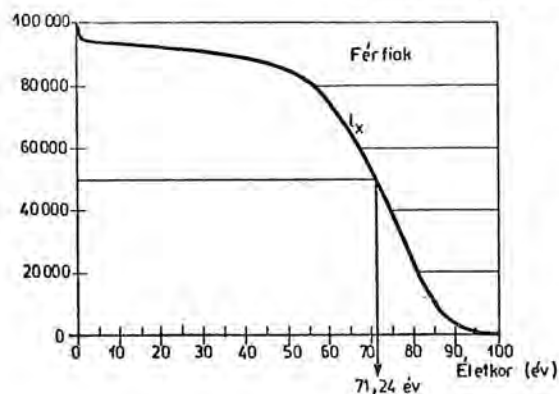
egzakt életkorig továbbélők által ezen életkortól teljes kihalásukig még leélendő éveknek a számát $(T_x = l_x e_0^0)$ szimbolizálja.

III. 6/a. AZ ÚJSZÜLÖTTEK VÁRHATÓ VALÓSZÍNŰ ÉLETTARTAMA
ÉS HALÁLOZÁSI KORA
MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE
1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALÁLOZÁSI TÁBLÁJA ALAPJÁN

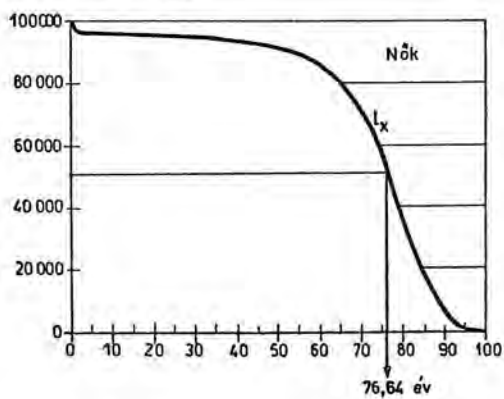
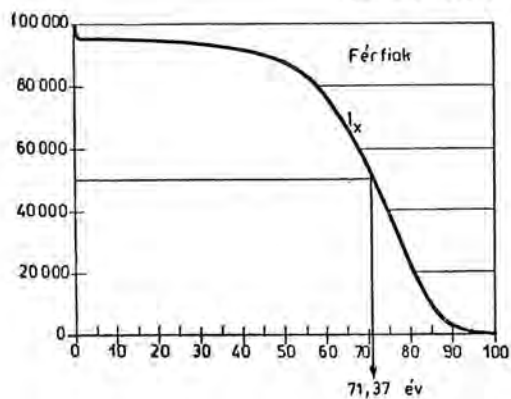
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



3.3 Néhány nevezetes életkor alakulása Magyarország férfi és női népessége halandósági táblái alapján

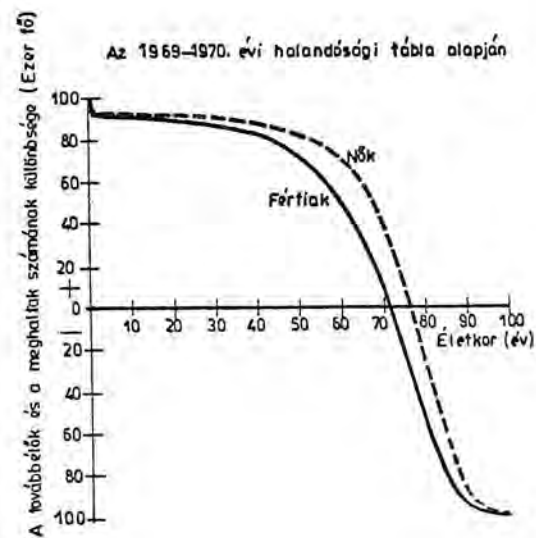
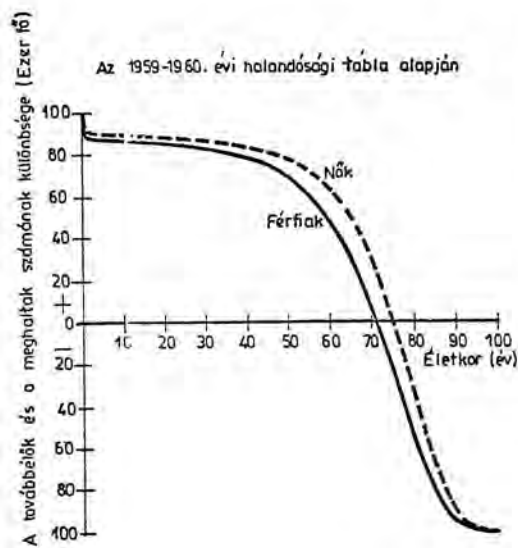
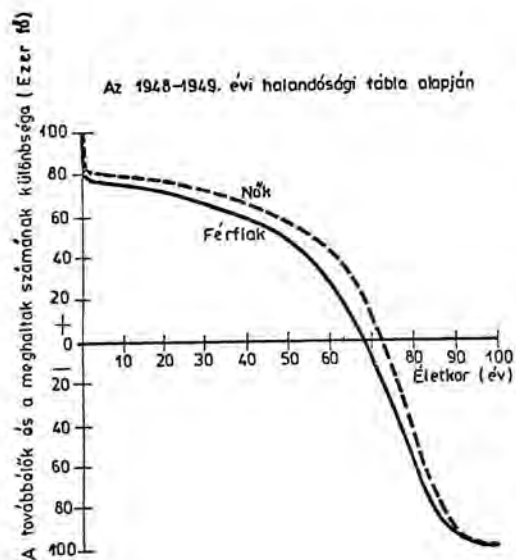
A halandósági tábla megnevezése	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női
	n é p e s s é g															
	1900-1901. évi		1910-1911. évi		1920-1921. évi		1930-1931. évi		1940-1941. évi		1948-1949. évi		1959-1960. évi		1969-1970. évi	
	h a l a n d ó s á g i t á b l á j a a l a p j á n															
1. A halandósági tábla meghaltjainak átlagos életkora (a születéskor várható átlagos élettartam, illetve az újszülöttek átlagos elhalálozási kora) (év)	36,56	38,15	39,07	40,48	41,04	43,12	48,70	51,80	54,95	58,24	58,75	63,24	65,18	69,57	66,51	72,11
2. Az újszülöttek valószínű élet- tartama (és elhalálozási kora) (év)	39,22	40,80	45,33	46,87	48,77	52,23	60,39	63,96	65,73	69,31	68,27	72,62	71,24	75,29	71,37	76,64
3. A halálozások öregkori modális életkora (a normálkor) (év)	73,44	72,18	72,86	71,85	73,47	75,14	75,78	77,78	78,05	78,44	77,25	79,15	75,75	79,27	75,69	79,60
4. A halandósági tábla stacionér né- pességének átlagos életkora (év)	31,97	31,70	32,10	32,37	32,69	33,16	34,20	34,91	35,01	35,99	35,68	37,16	36,30	37,93	36,25	38,46
5. A halandósági tábla stacionér né- pességének átlagos elhalálozási kora (év)	63,94	63,40	64,20	64,74	65,38	66,32	68,40	69,82	70,02	71,98	71,36	74,32	72,60	75,86	72,50	76,92
6. A továbbélők és a meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlő- vé válásának életkora (év)	29,81	29,32	29,98	30,16	30,58	30,96	32,40	33,10	33,39	34,47	34,13	35,85	35,17	36,97	35,09	37,57
7. A továbbélők által már leélt, va- lamint a meghaltak által leélt A és a továbbélők által leélendő évek száma egyenlővé válásá- B nak életkora (év)	35,82 64,88	36,70 64,69	35,84 65,17	36,64 66,56	35,06 67,21	36,15 68,72	35,10 69,87	37,94 71,65	36,87 71,39	37,76 73,57	36,62 72,44	37,21 75,60	36,78 73,04	37,33 76,57	36,89 72,73	38,90 77,56
8. A meghaltak által már leélt és a továbbélők által már leélt és még leélendő évek száma egyen- lővé válásának életkora (év)	66,09	66,26	67,94	68,96	68,23	69,05	71,97	72,49	72,77	74,93	74,71	76,00	74,48	77,34	74,75	78,41

3.3 Néhány nevezetes életkor alakulása Magyarország férfi és női népessége halandósági táblái alapján (folytatás)

A halandósági tábla megnevezése	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női	A férfi	A női
	n é p e s s é g															
	1900–1901. évi		1910–1911. évi		1920–1921. évi		1930–1931. évi		1940–1941. évi		1948–1949. évi		1959–1960. évi		1969–1970. évi	
	h a l a n d ó s á g i t á b l á j a a l a p j á n															
9. A továbbélők által már leélt és az általuk még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora (év)	32,05	32,01	32,15	32,68	32,82	33,37	33,93	34,83	34,64	35,73	35,16	36,75	35,57	37,31	36,23	37,83
10. A meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora (év)	51,11	51,69	52,45	53,32	53,77	54,99	56,82	58,47	58,51	61,03	59,70	63,27	61,51	65,27	61,55	66,39
11. A továbbélők által leélt és a meghaltak által leélt évek száma egyenlővé válásának életkora (év)	65,68	65,51	65,88	67,02	67,74	69,03	70,12	71,71	71,44	73,41	73,49	76,38	73,86	77,17	73,58	78,12
12. Egy átlagos továbbélő által már leélt és még leélendő évek száma egyenlővé válásának életkora (az izometrikus életkor) (év)	32,05	32,01	32,15	32,68	32,82	33,37	33,93	34,83	34,64	35,73	35,16	36,75	35,57	37,31	36,23	37,83
13. A halandósági tábla stacionér népessége által összesen leélendő évek száma feleződésének életkora (a "centre vital") (év)	19,49	19,40	19,52	19,72	19,84	20,14	20,54	20,97	20,90	21,46	21,28	22,10	21,47	22,38	21,44	22,68
14. A továbbélők által leélt évek száma maximálissá válásának életkora (év)	52,49	53,57	52,60	55,16	54,49	56,50	56,39	58,41	57,14	60,69	58,05	61,82	58,67	62,91	59,24	64,19

Forrás: Számításaink Pallós Emil: Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig. (A KSH Népessegstudományi Kutató Intézetének 34.sz. közleménye, 1971) c. kiadványának, valamint Magyarország népességének 1969-1970. évi halandósági tábláját tartalmazó kéziratának a felhasználásával készültek.

III. 6/b. A TOVÁBBÉLŐK ÉS A MEGHALTAK SZÁMA KÜLÖNBSÉGÉNEK $l_x - \sum_{x=0}^{x=x} d_x$ ALAKULÁSA A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL
MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



Könnyen belátható, hogy egy átlagos x éves egzakt életkorig továbbélőre a leélt éveknek nagyobb száma jut, mint ahány évet ő maga leélt:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=x} L_x}{l_x} = \frac{x l_x}{l_x} + \frac{\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x}{l_x} = x + \frac{\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x}{l_x},$$

vagyis

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=x} L_x}{l_x} > x.$$

A $\sum_{x=0}^{x=x} L_x / l_x$ hányados számlálójában szereplő $\sum_{x=0}^{x=x} L_x = T_0 - T_x$ mutatót az

eddigiektől bizonyos szempontból eltérő módon is értelmezhetjük. A halandósági tábla újszülötteinek a száma (l_0) - mint ismeretes - a különböző életkorokban meghaltak számának

az összegével egyenlő ($l_0 = \sum_{x=0}^{x=\omega} d_x$), s a bármely életkorig továbbélők száma felfogható

az adott és az adottnál magasabb életkorban meghaltak számainak az összegeként

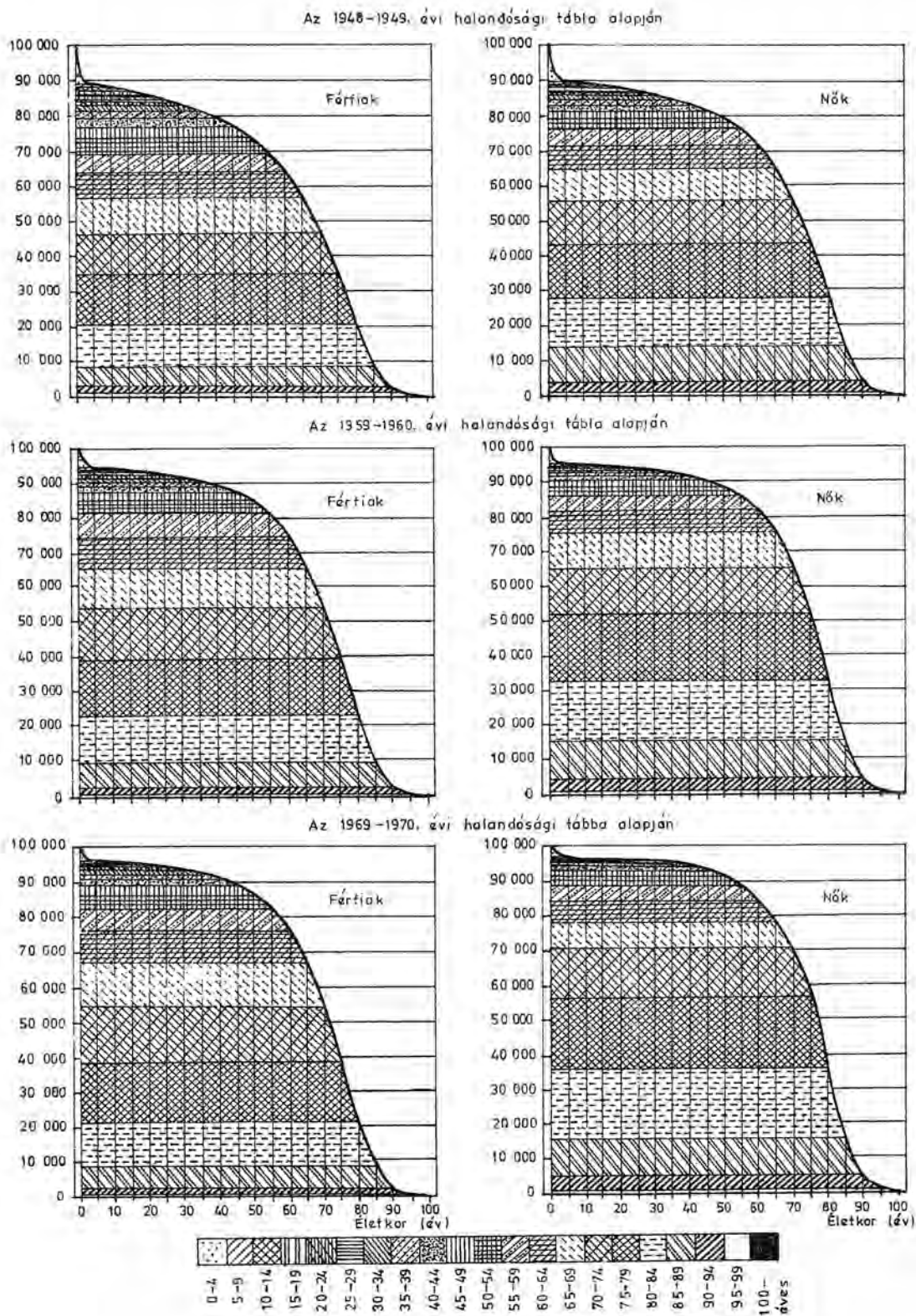
($l_x = \sum_{x=x}^{x=\omega} d_x$). Kézenfekvő továbbá, hogy a különböző korévekben, illetve korcsoportokban

leélt évek száma és a táblabeli stacionér népesség által leélt összes évek száma (vagyis az

l_x görbe alatti összterület $\sum_{x=0}^{x=\omega} L_x = T_0$ is felfogható a különböző életkorokban meghaltak

által leélt évek számaként is és a halandóság színvonalának a süllyedése többek közt abban jut kifejezésre, hogy az egyes korévekben, illetve korcsoportokban leélt évek számának egyre nagyobb hányadát teszik ki az adott korévtől, illetve korcsoporttól távolabb eső, idősebb korban meghaltak által leélt évek és egyre kisebb hányadát a hozzá közeleső, fiatalabb korban meghaltak által leélt évek. Kitűnik ez a mellékelt III, 7. ábrából is, mely a továbbélők és a leélt évek számának a megoszlását mutatja be a férfi és női népesség alapul vett három utolsó halandósági táblája alapján. Bármely adott x éves életkorig leélt évek számát felfoghatjuk az adott életkorig meghaltak és a továbbélők által leélt évek számaként is, bár nem kétséges, hogy a továbbélők által leélt évek száma is felosztható az adott és idősebb korban meghaltak által leélt évekre. Végezzük számításainkat pl. csupán 20 éves korig haladva az öt éves korcsoportokat tartalmazó rövidített, illetve összevont halandósági tábla alapján. Az egyes korcsoportokban a meghaltak által leélt évek számának az egy meghaltra jutó há-

III. 7. A TOVÁBBÉLŐK ÉS A LEÉLT ÉVEK SZÁMÁNAK MEGOSZTLÁSA A MEGHÁLTAK
ÉLETKORA SZERINT MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE
1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



nyadát ${}_5a_x$ -szel jelölve* könnyen beláthatjuk, hogy:

$$\begin{aligned}
 T_o - T_{20} &= \sum_{x=0}^{x=20} {}_5L_x = L_{o-19} = L_{o-4} + L_{5-9} + L_{10-14} + L_{15-19} \\
 &= \left[(L_{o-4} - {}_5l_{20}) + {}_5l_{20} \right] + \left[(L_{5-9} - {}_5l_{20}) + {}_5l_{20} \right] \\
 &+ \left[(L_{10-14} - {}_5l_{20}) + {}_5l_{20} \right] + \left[(L_{15-19} - {}_5l_{20}) + {}_5l_{20} \right] \\
 &= \left[({}_5d_{15-19} + {}_5d_{10-14} + {}_5d_{5-9} + a_{o-4} \cdot d_{o-4}) + {}_5l_{20} \right] \\
 &+ \left[({}_5d_{15-19} + {}_5d_{10-14} + a_{5-9} \cdot d_{5-9}) + {}_5l_{20} \right] \\
 &+ \left[({}_5d_{15-19} + a_{10-14} \cdot d_{10-14}) + {}_5l_{20} \right] + \left(a_{15-19} \cdot d_{15-19} + {}_5l_{20} \right) = \\
 &= 4 \cdot {}_5l_{20} + \left[({}_5d_{15-19} + {}_5d_{10-14} + {}_5d_{5-9}) + (L_{o-4} - {}_5l_5) \right] \\
 &+ \left[({}_5d_{15-19} + {}_5d_{10-14}) + (L_{5-9} - {}_5l_{10}) \right] \\
 &+ \left[({}_5d_{15-19}) + (L_{10-14} - {}_5l_5) + (L_{15-19} - {}_5l_{20}) \right] \\
 &= 20 \cdot {}_5l_{20} + \left[(15 \cdot {}_5d_{15-19} + 10 \cdot {}_5d_{10-14} + {}_5d_{5-9}) + (L_{o-4} - {}_5l_5) \right. \\
 &+ (L_{5-9} - {}_5l_{10}) + (L_{10-14} - {}_5l_{15}) + (L_{15-19} - {}_5l_{20}) \left. \right] \\
 &= 20 \cdot {}_5l_{20} + (L_{o-4} - {}_5l_{20}) + (L_{5-9} - {}_5l_{20}) + (L_{10-14} - {}_5l_{20}) \\
 &\quad + (L_{15-19} - {}_5l_{20}),
 \end{aligned}$$

s a ${}_5l_{20}$ is felosztható a 20 éves és idősebb korban meghaltak által leélt évekre. A fentiek alapján:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=20} {}_5L_x}{{}_5l_{20}} = \frac{T_o - T_{20}}{{}_5l_{20}} = \frac{L_{o-19}}{{}_5l_{20}} = \frac{L_{o-4}}{{}_5l_{20}} + \frac{L_{5-9}}{{}_5l_{20}} + \frac{L_{10-14}}{{}_5l_{20}} + \frac{L_{15-19}}{{}_5l_{20}} =$$

*
 ${}_5a_x = ({}_5L_x - {}_5l_x) : {}_5d_x$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{[L_{0-4} - 5 l_{20}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} + \frac{[(L_{5-9} - 5 l_{20}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} + \\
&+ \frac{[(L_{10-14} - 5 l_{20}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} + \frac{[(L_{15-19} - 5 l_{20}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} = \\
&= \frac{[(5 d_{15-19} + 5 d_{10-14} + 5 d_{5-9} + a_{0-4} \cdot d_{0-4}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} + \\
&+ \frac{[(5 d_{15-19} + 5 d_{10-14} + a_{5-9} d_{5-9}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} + \\
&+ \frac{[(5 d_{15-19} + a_{10-14} \cdot d_{10-14}) + 5 l_{20}]}{l_{20}} + \frac{(a_{15-19} d_{15-19} + 5 l_{20})}{l_{20}} = \\
&= \frac{20 l_{20}}{l_{20}} + \frac{[(5 d_{15-19} + 5 d_{10-14} + 5 d_{5-9}) + (L_{0-4} - 5 l_{15})]}{l_{20}} + \\
&+ \frac{[(5 d_{15-19} + 5 d_{10-14}) + (L_{5-9} - 5 l_{10})]}{l_{20}} + \frac{[(5 d_{15-19}) + (L_{10-14} - 5 l_{15})]}{l_{20}} + \\
&+ \frac{(L_{15-19} - l_{20})}{l_{20}} = 20 + \frac{15 d_{15-19} + 10 d_{10-14} + 5 d_{5-9}}{l_{20}} + \frac{L_{0-4} - 5 l_{15}}{l_{20}} + \\
&+ \frac{L_{5-9} - 5 l_{10}}{l_{20}} + \frac{L_{10-14} - 5 l_{15}}{l_{20}} + \frac{L_{15-19} - 5 l_{20}}{l_{20}} = \\
&= 20 + \frac{L_{0-4} - 5 l_{20}}{l_{20}} + \frac{L_{5-9} - 5 l_{20}}{l_{20}} + \frac{L_{10-14} - 5 l_{20}}{l_{20}} + \frac{L_{15-19} - 5 l_{20}}{l_{20}} .
\end{aligned}$$

Lássuk ezek után, milyen módszertani megfontolások alapján és hogyan történt az e fejezet e pontja bevezető részében felsorolt, hagyományosnak nem tekinthető középértékeknek (nevezett életkoroknak) a kiszámítása, hogyan alakulnak a középértékeknek a nemek és a halandóság szintje szerinti különbségei és miként osztható fel alapul vételükkel a tovább-

élési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület a továbbélők által már leélt éveknek a számát, a meghaltak által már leélt éveknek a számát és a továbbélők által még leélendő éveknek a számát reprezentáló területekre?

E középértékek Magyarország férfi és női népessége halandósági táblái alapján becsült alakulását a 3.3. tábla a szükségessé váló párhuzamba állítások, egybevetések megkönnyítésének a céljából a már ismert és elemzett középértékekkel együtt mutatja be.

A továbbélők és a meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3. tábla 6. sora adatainak) a kiszámítása az

$$y = T_x - \sum_{x=0}^{x=x} L_x$$

függvény az abszcissza tengellyel (kortengellyel) alkotott metszéspontjának (zérushelyének) a meghatározására vezethető vissza. A halandósági tábla T_x mutatójának értéke az x éves egzakt életkorig továbbélők által még leélendő összes éveknek a számaként is felfogható, L_x mutatója pedig a továbbélők és a meghaltak által x évesen leélt éveknek a számát egyaránt mutatja. A T_x mutató értéke és a L_x mutató születéstől a különböző egzakt életkorokig kumulált értéke különbségének az alakulását a különböző egzakt életkorokra kiszámítva a női népesség 1969-1970. évi halandósági táblája alapján pl. azt találtuk, hogy ez a különbség a 37 éves egzakt életkorban még + 108 054,5 év, a 38 éves egzakt életkorban pedig már - 81 346,5 év. A P_1 (37, 108 054,5) és P_2 (38, - 81 346,5) pontokon átmenő egyenes egyenlete az

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) + y_1$$

formulának a felhasználásával számítva tehát

$$\begin{aligned} y &= - 189\,401,0 (x - 37) + 108\,054,5 = \\ &= - 189\,401,0 x + 7\,115\,891,5, \\ x &= \frac{7\,115\,891,5}{189\,401,0} = 37,57 \end{aligned}$$

a szóban forgó függvénygörbe a két adott pont közötti évének az e pontokat összekötő hural való helyettesítése természetesen kevésbé pontos becslést tesz lehetővé mint amelyet valamely, a szóban forgó különbségekhez szorosan illeszkedő regressziós függvény zérus helyének a meghatározása eredményezett volna, a halandósági tábla alapján számítható középértékek becslése során azonban, mint az az újszülöttek valószínű élettartamának (és halálozási korának), valamint a halálozások öregkori modális életkorának (az ún. normálkornak) a legelterjedtebb meghatározási módjairól leírtakból is kitűnik, a becslések pontosságának a hasonló mértékét általában elfogadhatónak tartjuk. Ezért nem csupán ennek, hanem a további középértékeknek (nevezetes életkoroknak) a meghatározását is hasonló módszertani

meggondolások alapján végeztük. A szóban forgó életkor egyébként azt az életkort jelenti,

amelyig haladva a tábla továbbélői és meghaltjai együttesen a tábla ujszülöttei ($l_0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x$) által összesen leélendő évek számának a felét, vagyis a $\sum_{x=0}^{\omega} L_x / 2 = T_0 / 2$ számú évet már

leéltek, az általuk már leélt éveknek a száma tehát egyenlővé válik az általuk még leélendő

éveknek a számával ($\sum_{x=0}^{x=x} L_x = T_x$), különbségük tehát zérus ($T_x - \sum_{x=0}^{x=x} L_x = 0$), megha-

tározása tehát, az ujszülöttek valószínű élettartama (és halálozási kora) meghatározásának

az analógiájára, a $\sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_0$ mutató értéke felére csökkenési (feleződési) idejének a

meghatározásaként is felfogható. A 3.3. tábla 6. sorából kitűnik, hogy e mutató értékei a férfiakénál kedvezőbb halandóságu nők esetében magasabbak, mint a férfiaknak az esetében és a halandósági szintnek a süllyedése, vagyis a születéskor várható átlagos élettartamnak a növekedése általában ezen értékeknek a növekedésével jár együtt, bár a halandósági szint igen kismérvű süllyedése esetében ez a növekedés nem szükségszerű. A III.8/a. ábra ezen életkornak a fentiekben vázolt meghatározási módját mutatja be a III.8/b. ábra pedig azt az előadottak alapján könnyen belátható tényt szemlélteti, hogy az ezt az életkort a továbbélési rend l_x görbéjével összekötő, a koordináta rendszer vízszintes tengelyére (a kortengelyre) merőleges egyenes-szakasz a l_x görbe és a koordináta tengelyek által határolt

$\sum_{x=0}^{\omega} L_x = T_0$ nagyságu területet két különböző alaku, de egymással egyenlő nagyságu terü-

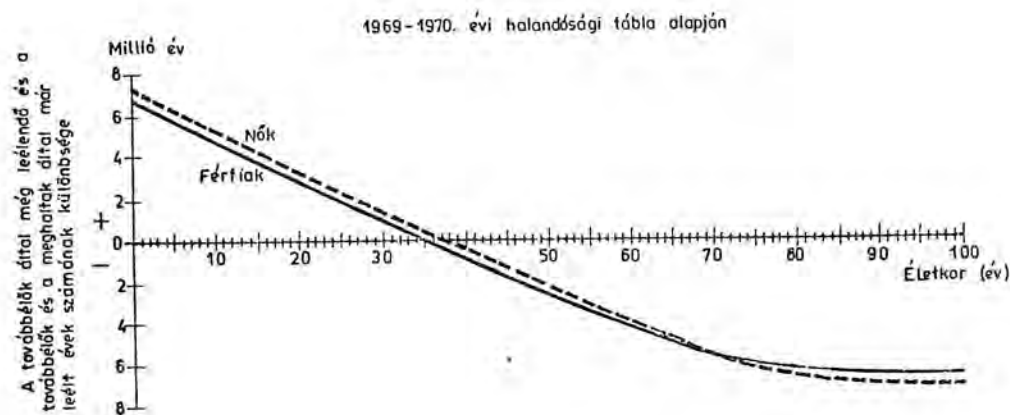
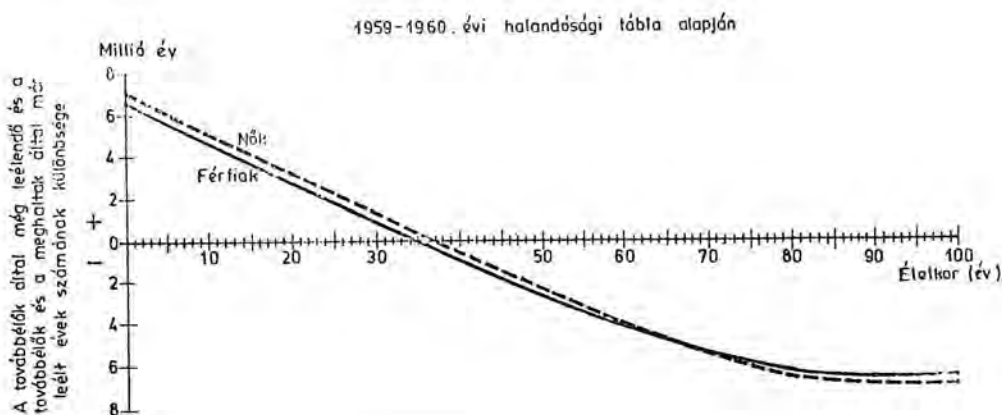
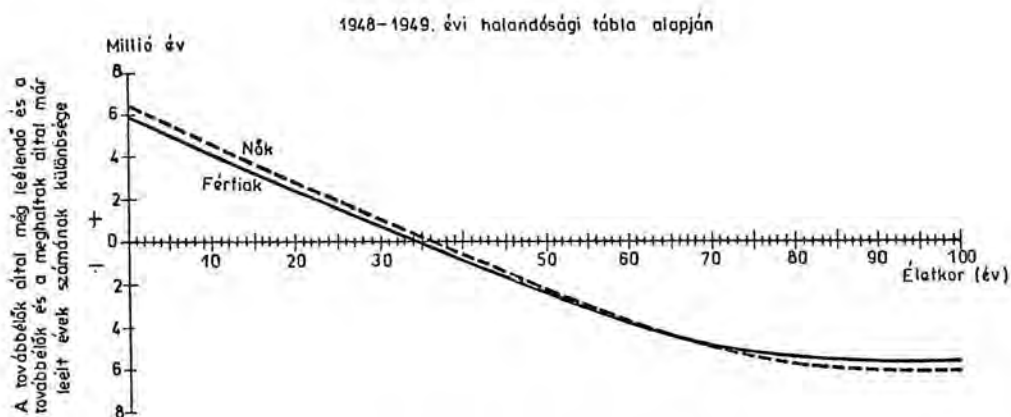
letre osztja fel, melyek nagysága a nők esetében minden halandósági tábla alapján nagyobb, mint a férfiak esetében és a születéskor várható átlagos élettartam növekedésének a hatására nő.

A továbbélők által már leélt, valamint a meghaltak által leélt és a továbbélők által leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3. tábla 7. sora adatainak) a kiszámítása az

$$y = \frac{T_0}{2} - x l_x$$

függvény az abszcissza tengellyel (kortengellyel) alkotott metszéspontjának (zérushelyének) a meghatározásaként is felfogható, de elképzelhető például az $x l_x$ mutató értékeinek az alakulását leíró görbe (III.16/a. ábra) és az $y = T_0 / 2$ egyenes metszéspontjainak a meghatározása formájában is. A $T_0 / 2$ állandót jelent és könnyen belátható, hogy az $x l_x$ mutató értékeinek az alakulását leíró görbének az $y = T_0 / 4$, $y = T_0 / 3$ stb. egyenesekkel (állandókkal), elméletileg minden, az $y = x l_x$ függvénygörbe maximumához tartozó függvényértéknél kisebb állandót leíró egyenessel alkotott két-két metszéspontja is meghatározható. A valamely állandót leíró egyenessel alkotott két metszéspontnak csak az abszcisszái különbözőek, a két

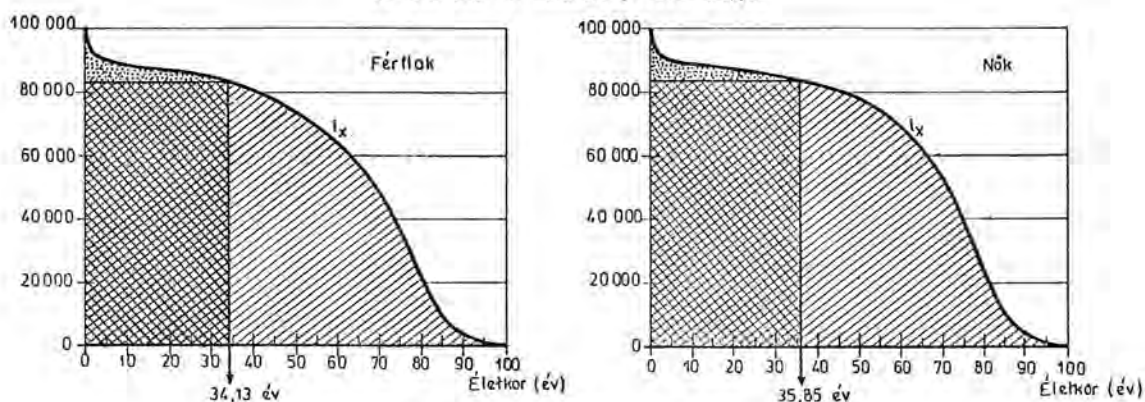
III. 8/a, A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉS A TOVÁBBÉLŐK ÉS A MEGHALTAK
 ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMA KÜLÖNBségÉNEK $(T_x - \sum_{x=0}^{x=x} L_x)$ ALAKULÁSA
 A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE
 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



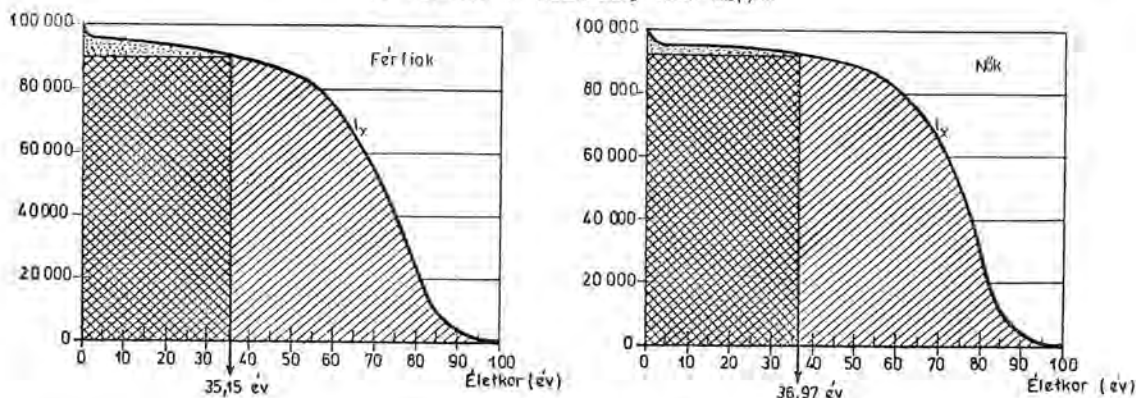
III. 8/b. A TOVÁBBÉLÉSI REND l_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0)^x HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A TOVÁBBÉLŐK ÉS A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLETTEL

MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969.1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

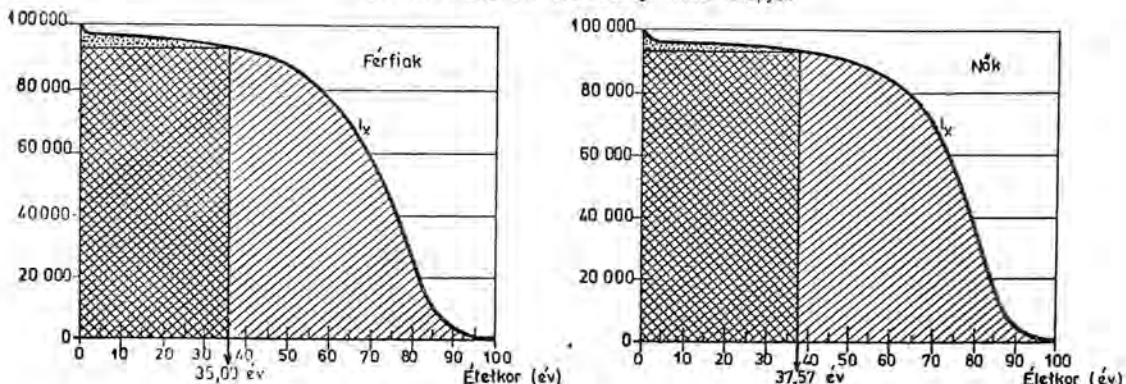
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leéleendő évek száma

különböző abszcissza értékhez ugyanis az ordináta érték tartozik. Egyik esete ez a demográfiában és a gazdaságdemográfiában oly nagy szerepet játszó ekvivalenciáknak, melyek behatóbb elemzésére az értekezés szerzője a későbbiek során külön tanulmány formájában szándékozik kitérni.

A xl_x mutató értékének, vagyis az x éves egzakt életkorig továbbélők által leélt évek számának az alakulása önmagában véve is érdekes és értékes mutatója a halandósági táblának. E mutató értéke a halandóság színvonala javulásának, vagyis süllyedésének a hatására növekszik a szorzat egyik tényezőjének, az x mutató értékének a növekedése következtében, ω éves korban viszont e mutató értéke minden esetben 0-val válik egyenlővé, mint-hogy $l_\omega = 0$. A halandóság szintjének javulása, vagyis süllyedése viszont - mint ismeretes - abban is kifejezésre jut, hogy az ω éves kor egyre magasabb kort jelent. A későbbiek során látni fogjuk, hogy az xl_x mutató értékének az életkor haladásával kapcsolatos alakulását leíró görbének (III. 16/a. ábra) a halandósági szint süllyedésének (az e_0^0 értéke növekedésének) a hatására egyre magasabb életkorokra tolódik át a maximuma és egyre nagyobbak az ezekhez a maximumokhoz tartozó függvényértékek, vagyis a továbbélők által ezekig az életkorokig leélt éveknek a számai is. Az xl_x mutató értékének a kor előrehaladásával kapcsolatos alakulásából adódik, hogy a 0 éves és ω éves egzakt életkorok közötti inter-

vallumban a $\sum_{x=0}^{\omega} L_x/2 = T_0/2$ mutatónak az értéke kétszer válik egyenlővé az xl_x muta-

tónak az értékével. A 3.3. tábla 7. sorából kitűnik, hogy a szóban forgó első és második egyenlővé válás is magasabb életkorban következik be a férfiakénál kedvezőbb halandóságu nőknek, mint a férfiaknak az élete folyamán, továbbá: ennek az egyenlővé válásnak mindkét életkora nő, a férfi és a női népesség esetében egyaránt, ha a halandósági szint süllyed, vagyis a születéskor várható átlagos élettartamnak az értéke nő (III. 9/a. és III. 9/b. ábra).

A meghaltak által már leélt és a továbbélők által már leélt és még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3. tábla 8. sora adatainak) a kiszámítása többek között az

$$y = \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - xl_x \right) - \left(xl_x + T_x \right)$$

függvény és abszcissza tengellyel (kortengellyel) alkotott metszéspontjának (zérushelyének) a meghatározása útján is elvégezhető. A vonatkozó adatokból és ábrákból kitűnik, hogy ez az életkor a kedvezőbb halandóságu nők esetében magasabb, mint a férfiak esetében és a halandósági szint süllyedésével, vagyis a születéskor várható átlagos élettartamnak a növekedésével legtöbbször, bár korántsem minden esetben, nő. (III. 10. ábra).

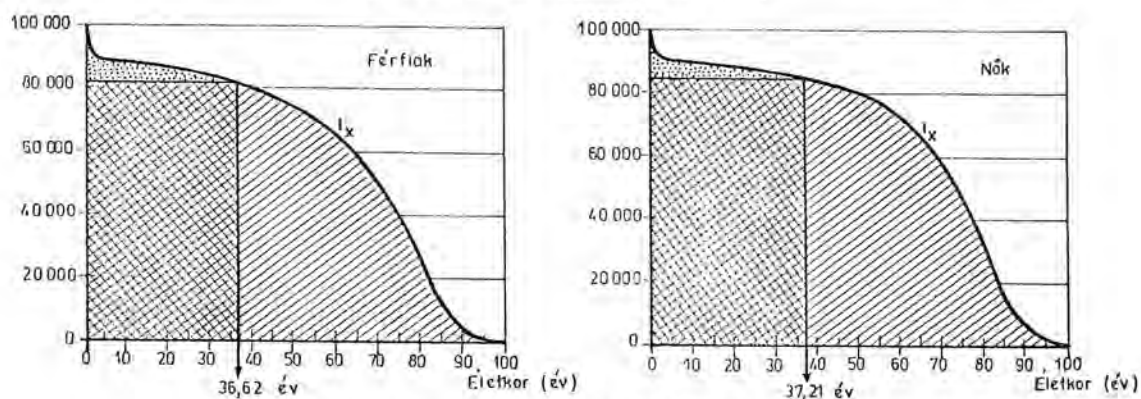
A továbbélők által már leélt és az általuk még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3. tábla 9. sora adatainak) a kiszámítása a

$$y = T_x - xl_x$$

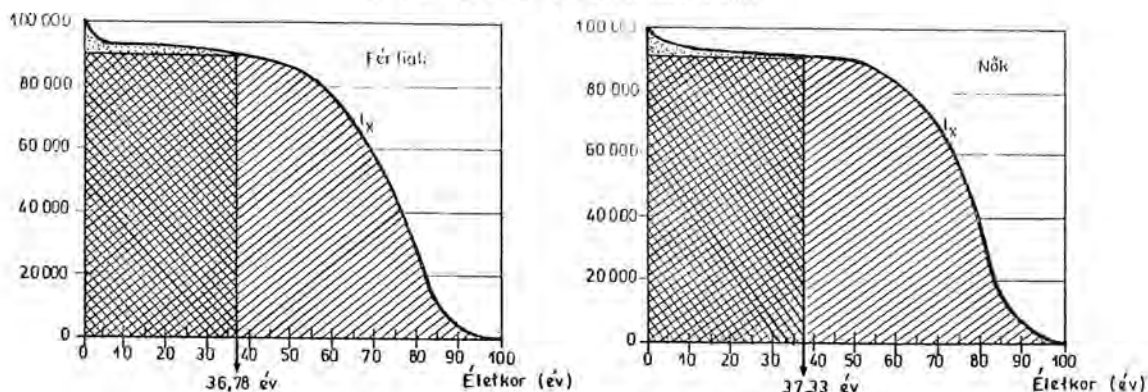
III. 9/a. A TOVÁBBÉLÉSI REND l_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTENŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉS A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLETTEL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

A - változat

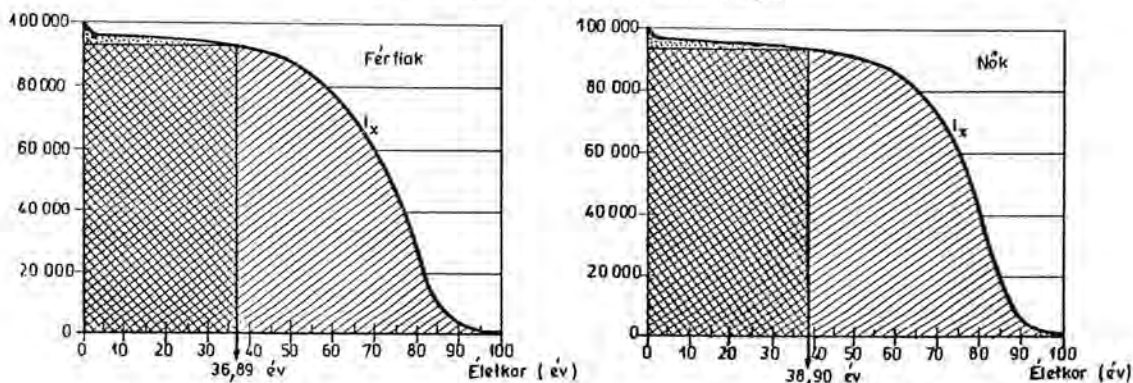
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

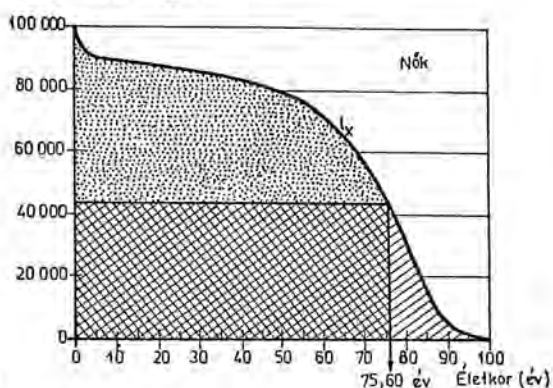
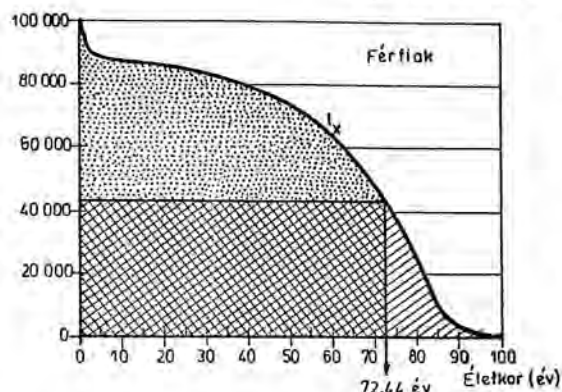
 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leéleendő évek száma

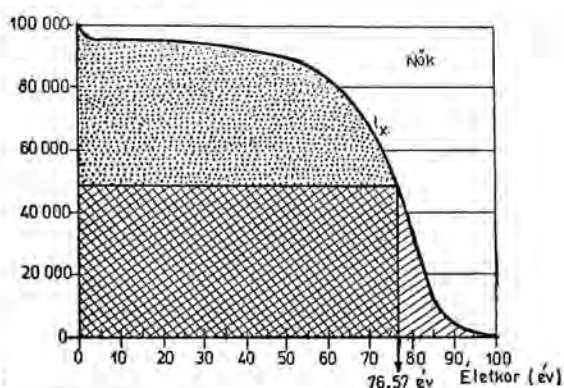
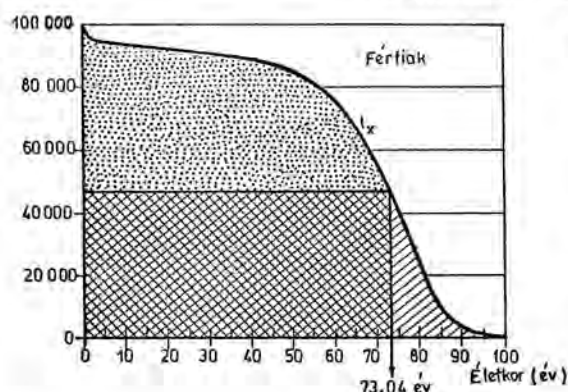
III. 9/b. A TOVÁBBÉLÉSI REND l_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉS A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLETTEL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1959. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

B-változat

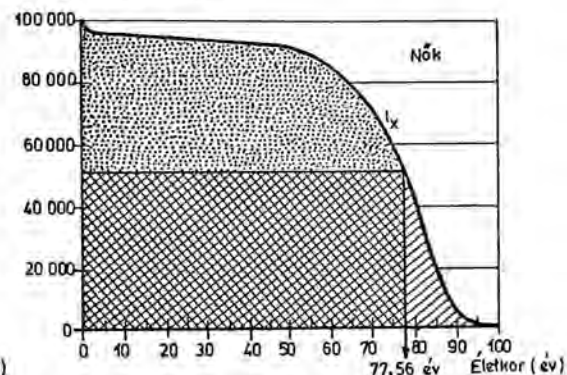
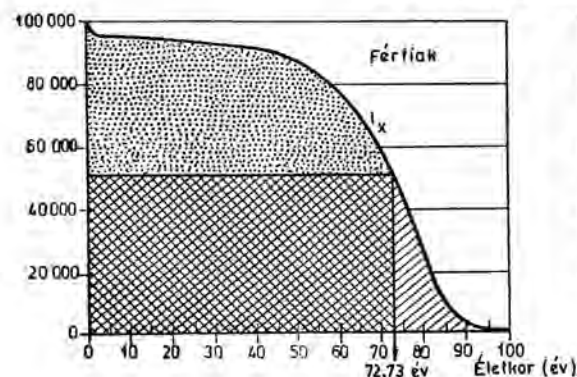
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

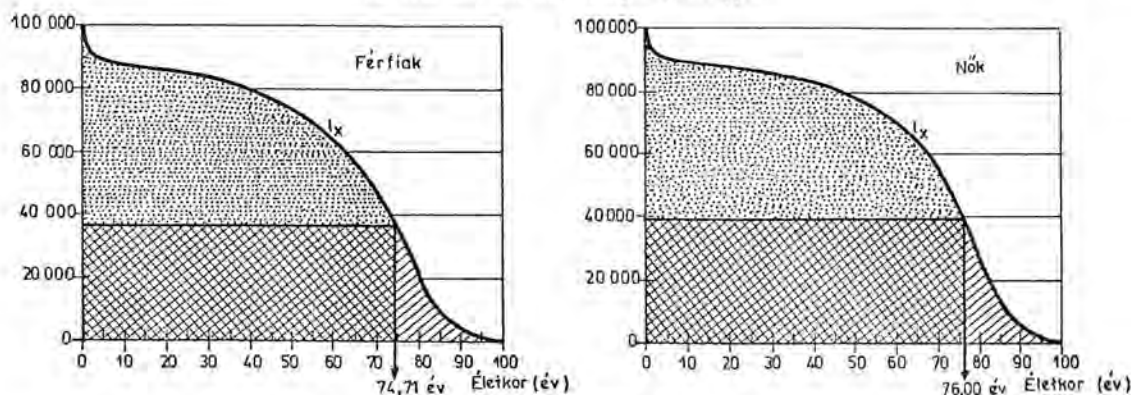
 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leéleendő évek száma

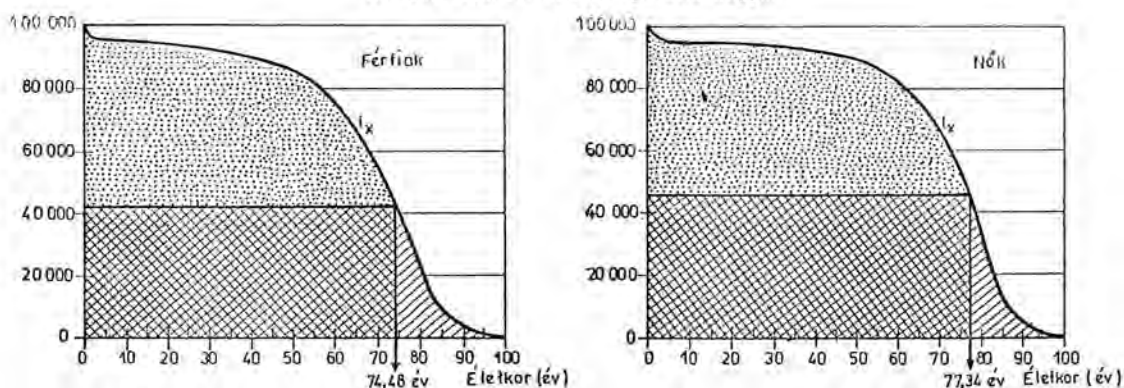
III. 10. A TOVÁBBÉLÉSI REND 1. GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉS MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLETTEL

MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

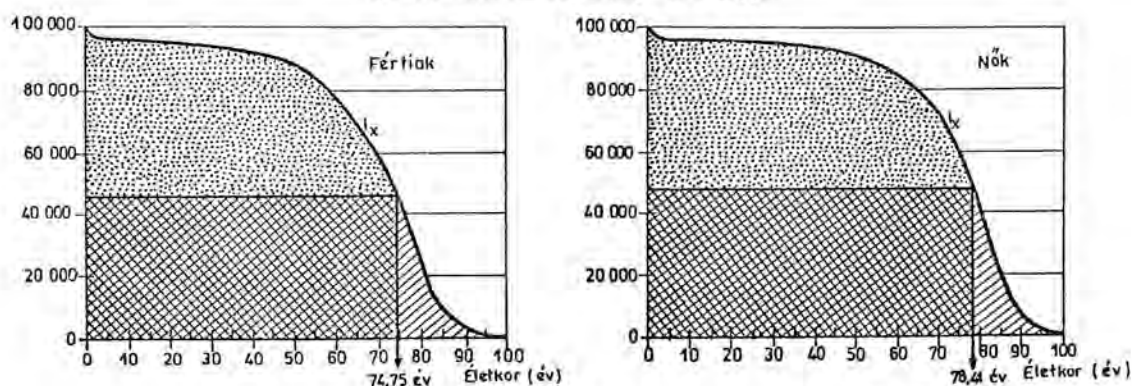
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leéleendő évek száma

függvény a koordináta rendszer vízszintes tengelyével (a kortengellyel) alkotott metszéspontjának (zérushelyének) a meghatározása formájában történt. Ennek az életkornak az elérésekor a tábla továbbélői már annyi évet éltek le, ahány évet még le fognak élni, vagyis az általuk már leélt éveknek a száma egyenlővé válik az általuk még leélendő éveknek a számával ($T_x = x l_x$), különbségük tehát zérus ($T_x - x l_x = 0$). A vonatkozó adatokból és ábrákból egyaránt kitűnik, hogy a halandóság szintjének a süllyedésével (a születéskor várható átlagos élettartamnak a növekedésével) e mutatónak az értéke nő és a kedvezőbb halandóságu nőknek az esetében minden halandósági tábla esetében jelentősen magasabb, mint a férfiak esetében (III. 11/a. és III. 11/b. ábra).

A meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3 tábla 10. sora adatainak) a kiszámítása az

$$y = T_x - \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right)$$

függvény a koordináta rendszer abszcissza tengelyével (kortengelyével) alkotott metszéspontjának a meghatározása formájában történt. A meghaltak által leélt évek száma a kor elő-

rehaladásával kapcsolatos alakulásának a mutatója $\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x$ önmagában véve is érde-

kes és értékes mutatója a halandósági táblának, bár értékei a halandóság színvonala javulásának, vagyis süllyedésének a hatására nem reagálnak túl érzékenyen. E mutatók értékei egyébként az x értékének a növekedésével, vagyis a kor előrehaladásával a T_0 , illetve

$\sum_{x=0}^{\omega} L_x$ mutatónak az értékéhez tartoznak. A halandóság színvonalának a javulása, vagyis

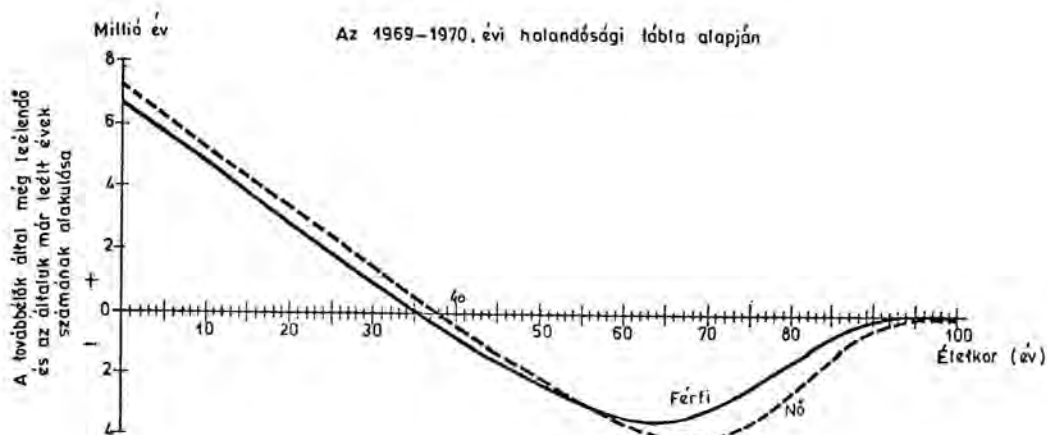
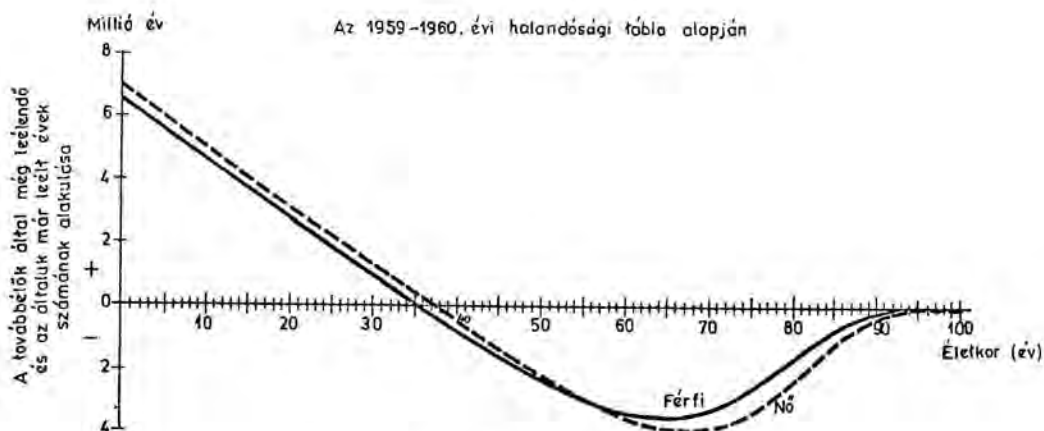
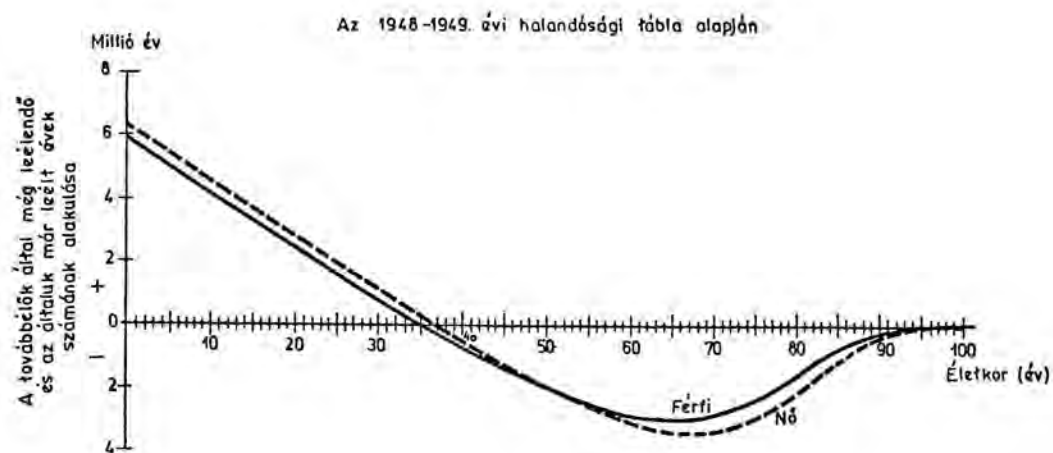
süllyedése - mint ismeretes - többek között abban is kifejezésre jut, hogy az e mutató értékének az alkalmazását leíró görbék egyre magasabb életkorban kezdenek el emelkedni, de ugyanakkor az ω éves kor eléréséig, egyre magasabbra emelkednek, mert a halandósági szint süllyedése a T_0 mutató értékének a változásában is kifejezésre jut (III. 12. ábra).

A meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek száma egyenlővé válá-

sának $T_x = \sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x$, illetve különbségük zérussá redukálódásának az életkora pe-

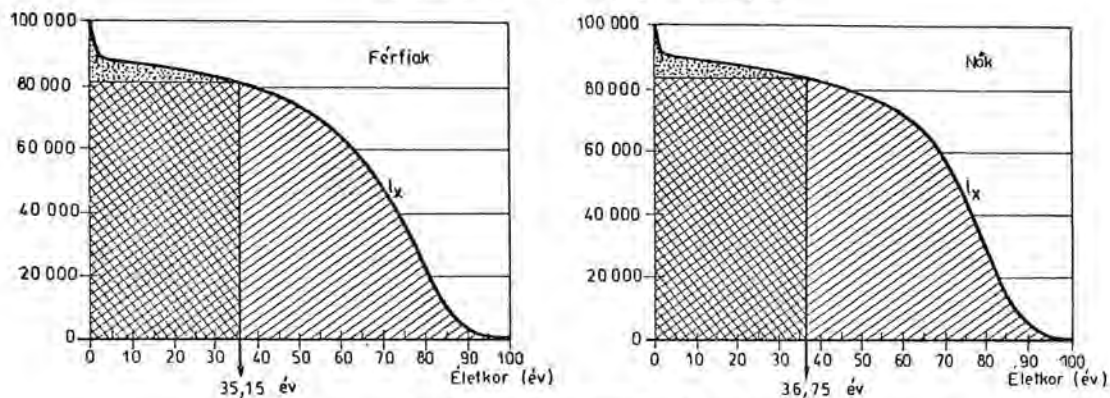
dig mint az a vonatkozó adatokból és ábrákból (III. 13/a. és III. 13/b. ábra) is kitűnik, magasabb a férfiakénál kedvezőbb halandóságu nők, mint a férfiak esetében és a halandósági szintnek a süllyedésével a férfiak és a nők esetében, ha nem is jelentősen, egyaránt emelkedik.

III. 11/a. A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉS AZ ÁLTALUK MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMA KÜLÖNBSÉGÉNEK ($T_x - x l_x$) ALAKULÁSA A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

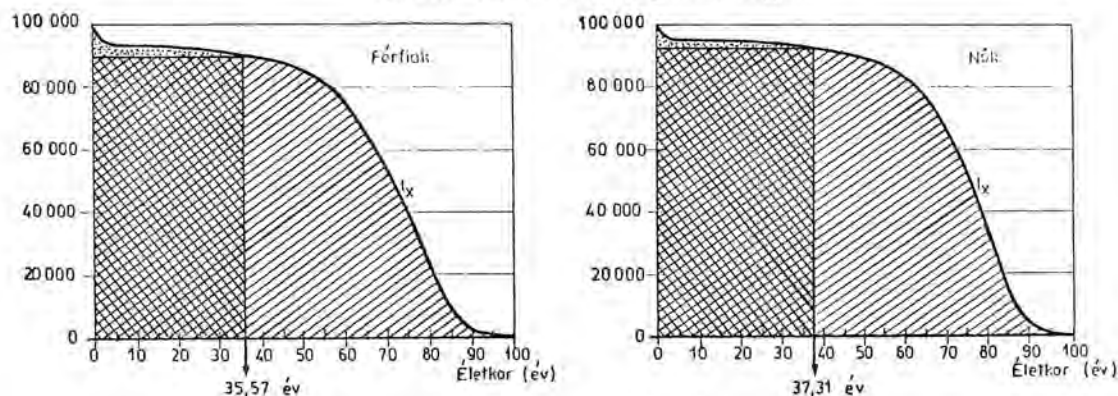


III, 11/b. A TOVÁBBÉLÉSI REND 1_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT ÉS AZ ÁLTALUK MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

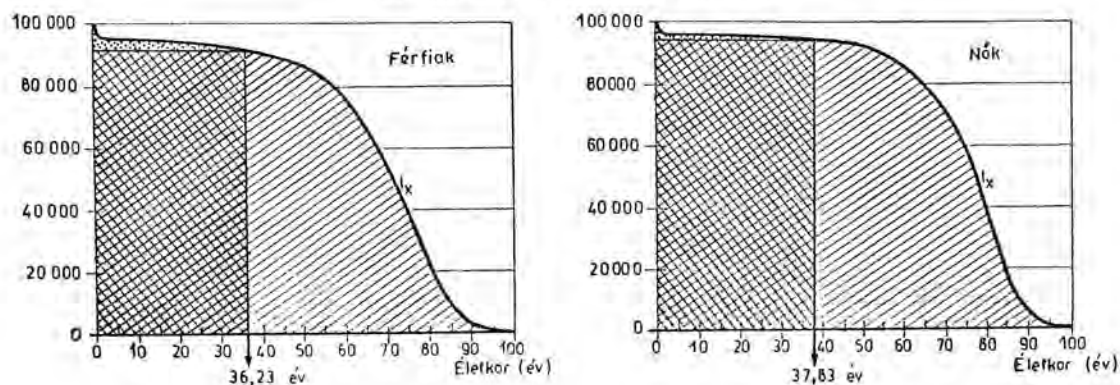
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leélendő évek száma

A továbbélők által leélt és a meghaltak által leélt évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3. tábla 11. sorának) a kiszámítása az

$$y = x l_x - \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right)$$

függvény a kortengellyel (abszcissa tengellyel) alkotott metszéspontjának (zérushelyének) meghatározása útján történt. A vonatkozó adatokból és ábrákból (III. 14/a. és III. 14/b. ábra) is látható, hogy az az életkor, melynek elérésekor a továbbélők által leélt évek száma

egyenlővé válik a meghaltak által leélt éveknek a számával $\left(x l_x = \sum_{x=0}^{\omega} (L_x - x l_x) \right)$ a különbségük ezáltal zérussal válik egyenlővé, magasabb a férfiakénál kedvezőbb halandóságu nők esetében, mint a férfiak esetében és a halandóság szintjének a süllyedésével (a születéskor várható átlagos élettartamnak a növekedésével) egyre magasabbra tolódik.

Ez az életkor minden halandósági tábla esetében jóval magasabb pl. annál az életkornál, amelyig haladva a halandósági tábla továbbélői és meghaltjai együttesen

$T_0/2 = \sum_{x=0}^{\omega} L_x/2$ számú évet már leéltek és még ugyanannyi évet fognak élni (lásd a 3.3. tábla 6. sorának az adatait).

Az egy átlagos továbbélő által már leélt és még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának (a 3.3. tábla 12. sora adatainak) a meghatározása az

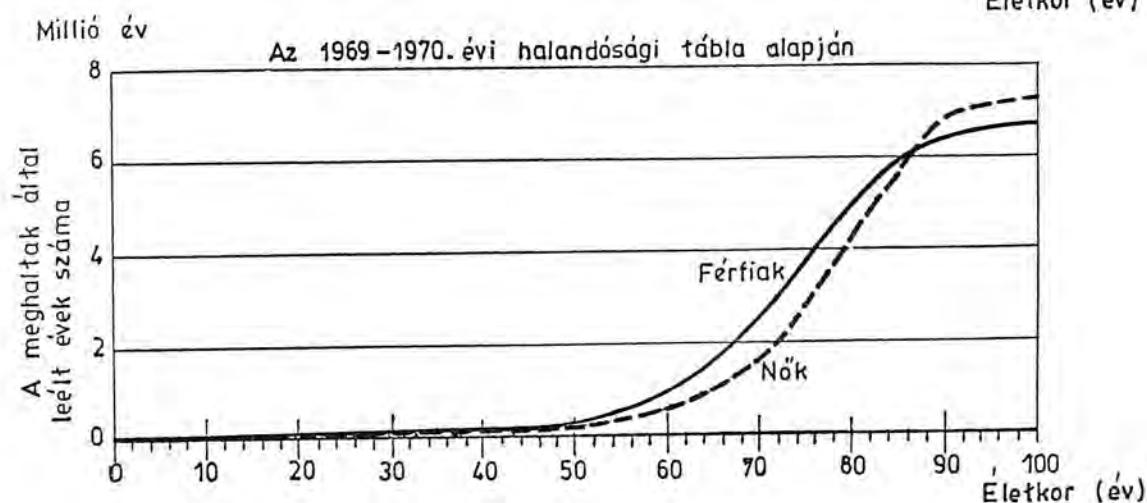
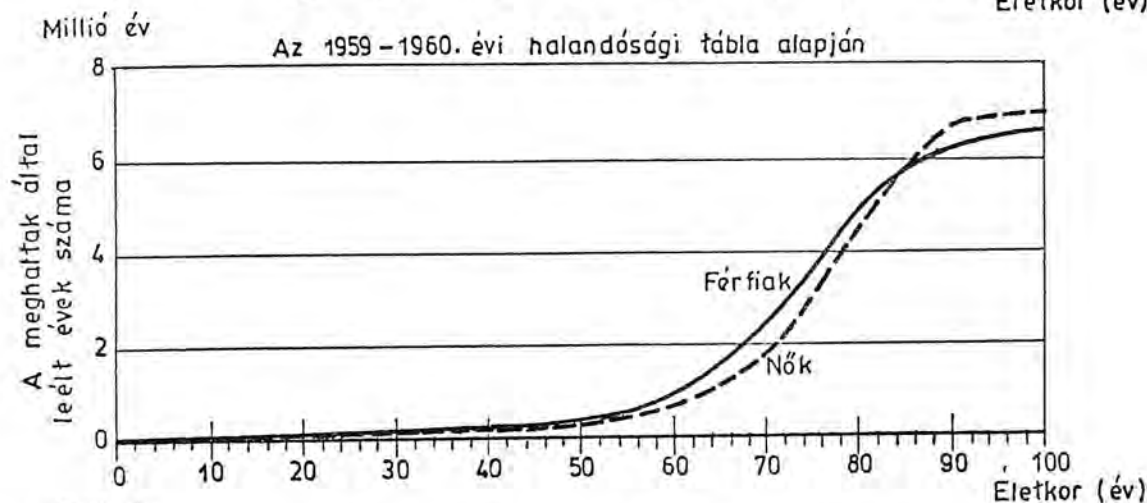
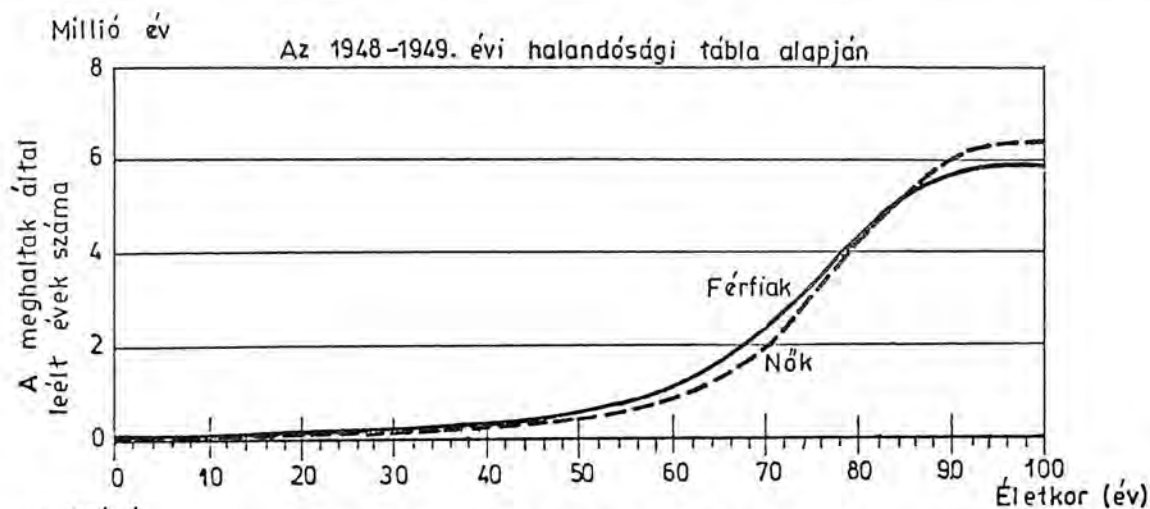
$$y = e_x^0 - x$$

függvény az abszcissa tengellyel (kortengellyel) alkotott metszéspontjának (zérushelyének) a kiszámítása formájában történt (III. 15/a. ábra), de egyéb módszerekkel is történhetik, melyek közül a jelzettet és további hármat - a férfi népesség 1959-1960. évi halandósági táblájának az alapul vételével - a III. 15/b. ábra szemléltet. Életünk delelőjének ez a mutatója azonos a Liebmann Hersch svájci demográfus által kidolgozott potenciális demográfia izometrikus életkor elnevezésű mutatójával (53). A vonatkozó adatokból és ábrákból (III. 15/a. ábra) egyaránt kitűnik, hogy e mutató értéke magasabb a kedvezőbb halandóságu nők, mint a férfiak esetében és a halandósági szintnek a süllyedésével legtöbbször emelkedik. Az izometrikus életkor nagysága - eltérően a potenciális demográfia számos többi mutatójának az értékétől - kizárólag a vonatkozó népesség halandósági táblájától függ.* Könnyen belátható, hogy az az életkor, melynek elérésekor az egy átlagos továbbélő által leélt éveknek a száma egyenlővé válik a még várható átlagos élettartammal ($x = e_x^0$), a különbségük ezáltal zérussá

*A szocialista országok demográfusai - mint jeleztük - közül dr. Egon Vielrose lengyel demográfus publikálta a legfigyelemreméltóbb munkát a potenciális demográfiáról (54).

III. 12. A MEGHALTAK ÁLTAL LEÉLT ÉVEK SZÁMÁNAK $\left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right)$ ALAKULÁSA

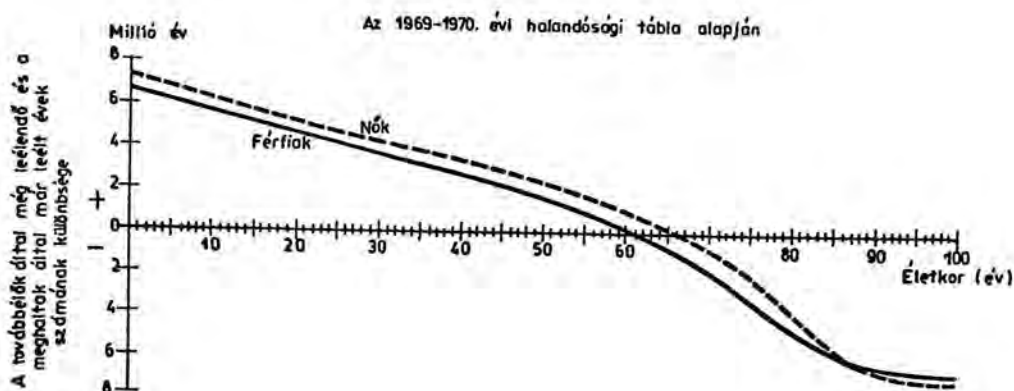
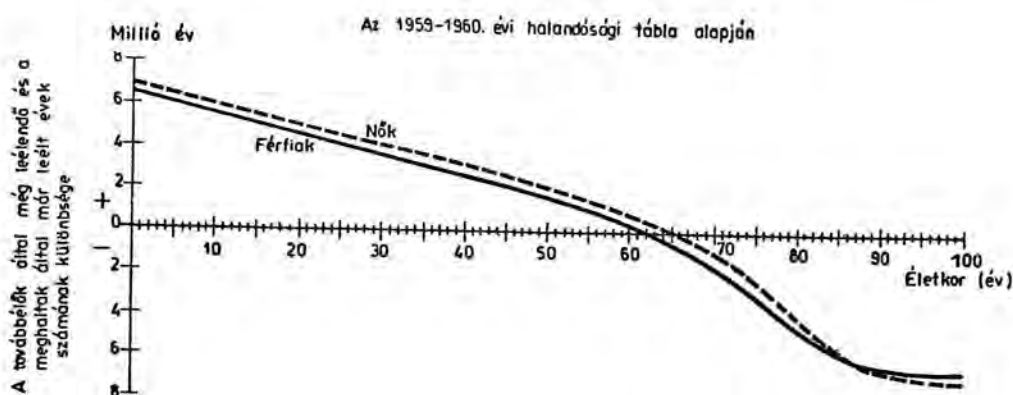
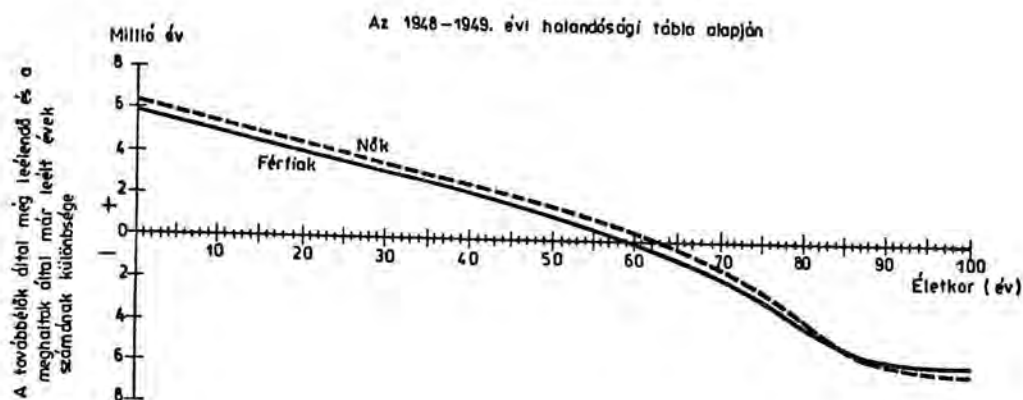
A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE
1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



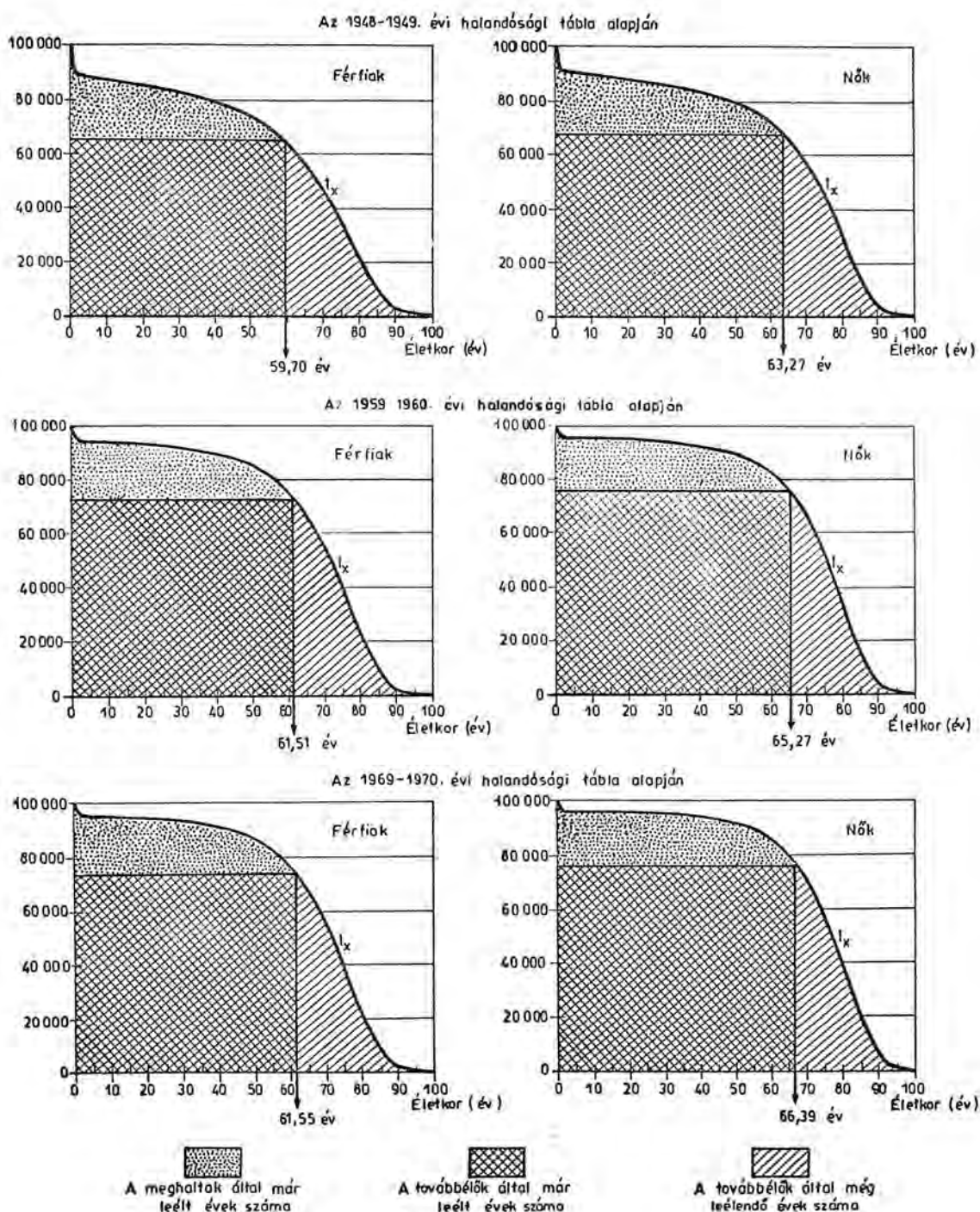
III. 13/a. A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉS A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR

LEÉLT ÉVEK SZÁMA KÜLÖNBSÉGÉNEK $\left[T_x - \left(\sum_{x=0}^{x=\infty} L_x \cdot x l_x \right) \right]$ ALAKULÁSA

A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL MAGYARORSZÁGI FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE
1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



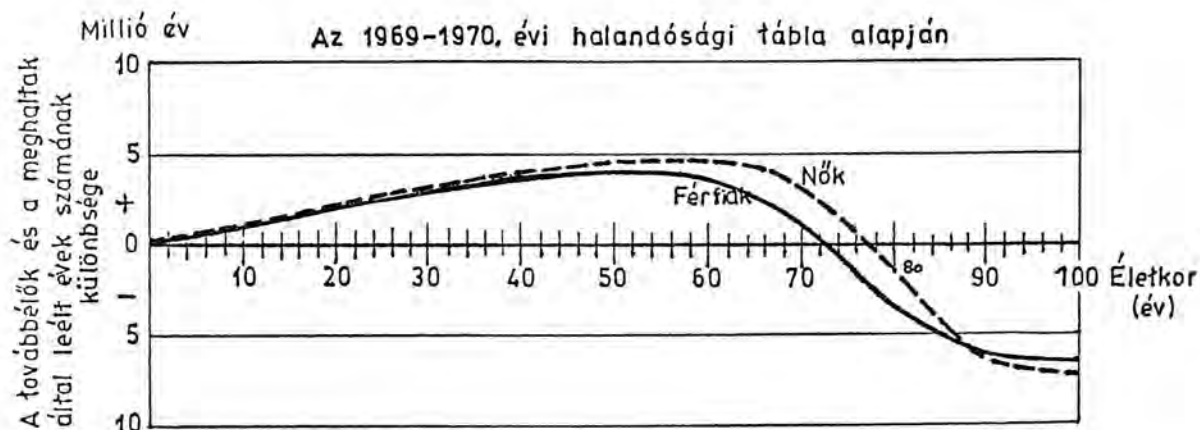
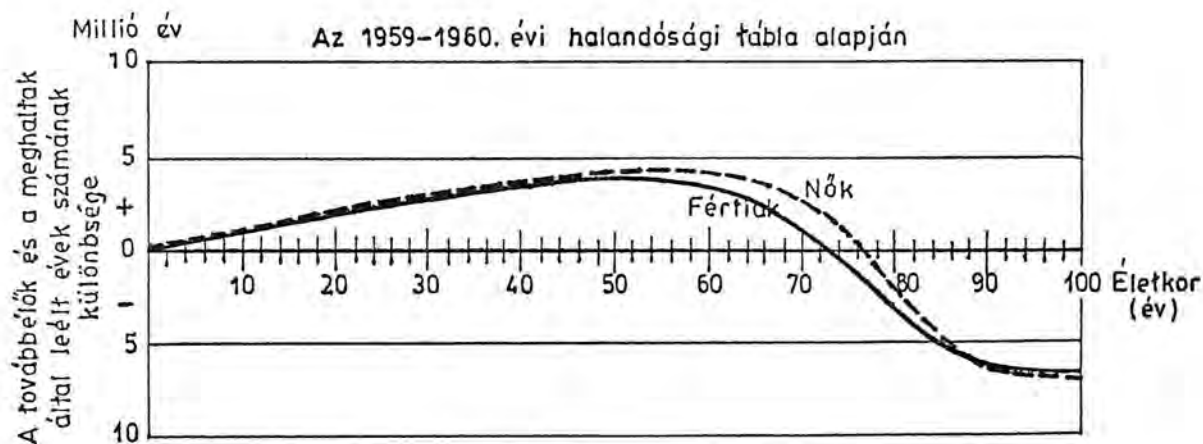
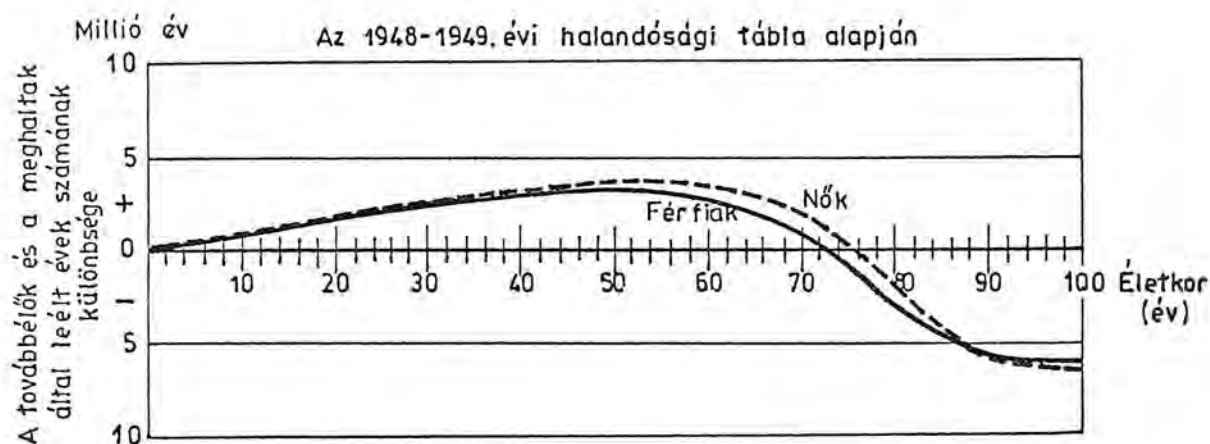
III. 13/b. A TOVÁBBÉLÉSI REND 1_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT ÉS A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



III. 14/a. A TOVÁBBÉLŐK ÉS A MEGHALTAK ÁLTAL LEÉLT ÉVEK SZÁMA

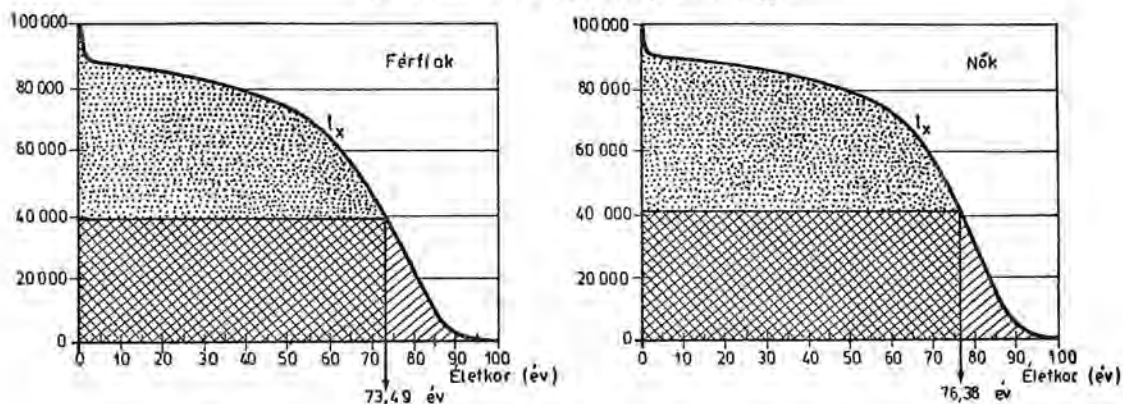
KÜLÖNBSEGÉNEK $\left[x l_x - \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right) \right]$ ALAKULÁSA A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL

MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi
és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

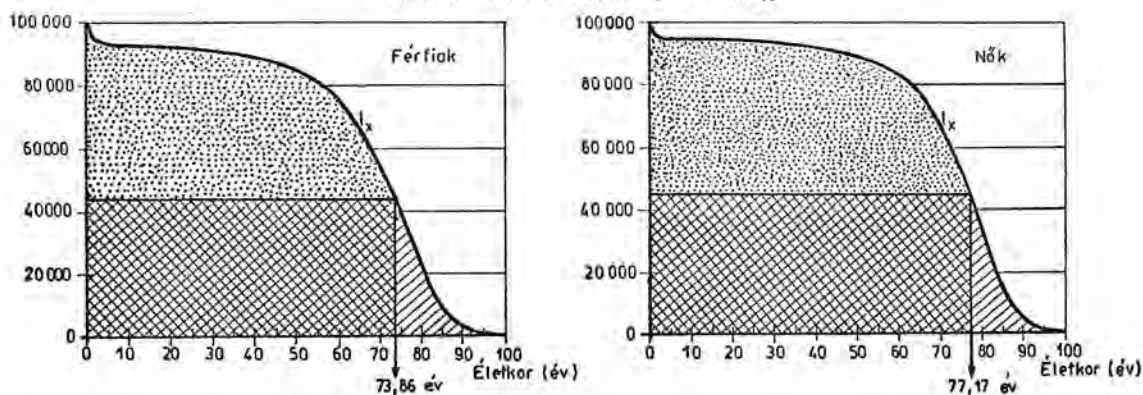


III. 14/b. A TOVÁBBÉLÉSI REND l_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA, MELYEK KÖZÜL A MEGHALTAK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT ÉS A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET AZONOS NAGYSÁGU MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

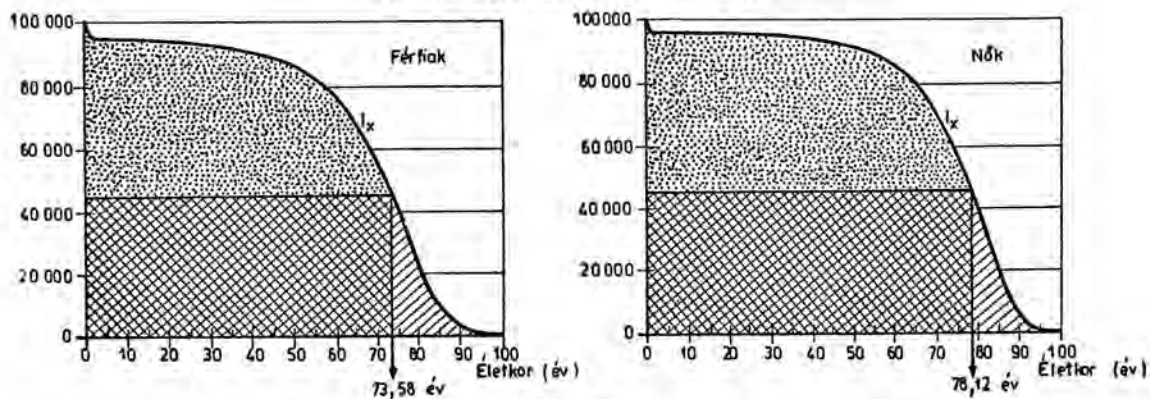
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leéltendő évek száma

redukálódik ($e_x^0 - x = 0$) azonos azzal az életkorral, melynek elérésekor az összes továbbélők által leélt éveknek a száma egyenlővé válik az általuk még leélendő összes éveknek a számával (lásd a 3.3. tábla 9. sorának az adatait). A $y = e_x^0 - x$ függvény egyébként - mint már jeleztük - az $y = T_x - x l_x = e_x^0 l_x - x l_x$ függvény l_x szerinti első deriváltjaként is felfogható. Könnyen belátható, hogy mindkét függvény esetében az $e_x^0 = x$ egyenlőségnek a fennforgása jelenti a vonatkozó kritikus életkornak az elérését. E kritikus életkor továbbá közelítő pontossággal egyenlő a táblabeli stacionér népesség átlagos életkorával ($\bar{a}$), illetve átlagos halálozási korának a felével ($0,5\bar{g}$). Valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) ugyanis - mint már szintén jeleztük - közelítőleg egyenlő azon éveknek a számával, mely alatt a népességet alkotó születési évjáratokban a továbbélők által leélt összes éveknek a száma egyenlővé válik az általuk még leélendő összes éveknek a számával, vagyis különbségük zérusra redukálódik. A stacionér népesség átlagos életkorának megfelelő $\bar{a}$ évvel a megfigyelés időpontja előtt születettek esetében ez az egyenlővé válás éppen a megfigyelés időpontjában következik be. Az egyes születési évjáratokban tehát (a népesség átlagos életkoráig $\bar{a}$ / továbbélők $l_{\bar{a}}$ esetében) a már leélt és a még leélendő éveknek az átlagos száma is egyenlővé válik egymással:

$$\bar{a} = e_{\bar{a}}^0,$$

minthogy

$$\bar{a} l_{\bar{a}} = l_{\bar{a}} e_{\bar{a}}^0.$$

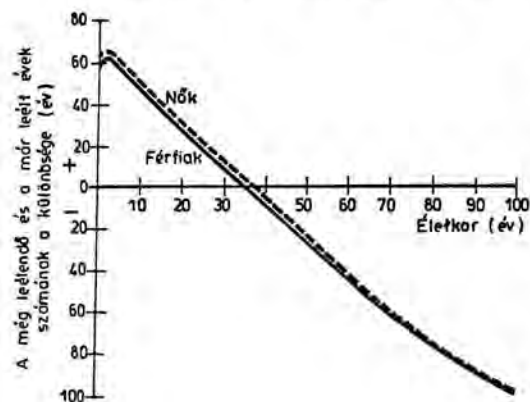
Ez a megállapításunk kapcsolatba hozható Jean Bourgeois-Pichatnak azzal a potenciális demográfia kritikai értékelése során tett megállapításával, hogy valamely tetszőleges népességnek az életpotenciálja - közelítő pontossággal - az átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartamnak a népesség összlétszámával történő megszorozása útján is kiszámítható (55). Az életpotenciál e kiszámítási módja azért ad csak közelítő pontosságú eredményt, mert az x éves korban várható átlagos élettartam csak közelítő pontossággal tekinthető az életkor (x) lineáris függvényének, vagyis az életkor előrehaladásával bekövetkező csökkenése csak közelítő pontossággal tekinthető lineárisnak. Ezért közelítő pontosságú csupán a már leélt és a még leélendő évek száma egyenlővé válása életkorának, a stacionér népesség átlagos életkorának (átlagos halálozási kora felének) és az átlagos életkor elérésekor még várható átlagos élettartamnak az egybeesése is.

A potenciális demográfia mutatójának tekinthető a halandósági tábla stacionér népessége által összesen leélendő évek száma feleződésének az életkora (az un. "Centre vital") is, melynek kiszámítása a táblabeli stacionér népesség teljes életpotenciálja fele, vagyis az

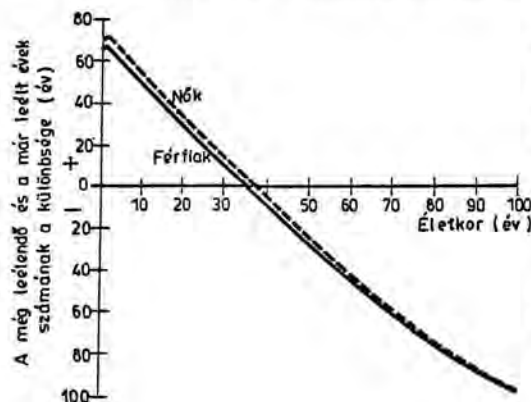
$$\frac{T_0 \bar{a}}{2} = \frac{l_0 e_{\bar{a}}^0}{2} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2} = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{0'} L_x =$$

III. 15/a. EGY ÁTLAGOS TOVÁBBÉLŐ ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉS AZ ÁLTALA MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMA KÜLÖNBSGÉNEK
ALAKULÁSA A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi,
1959-1960. évi, 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

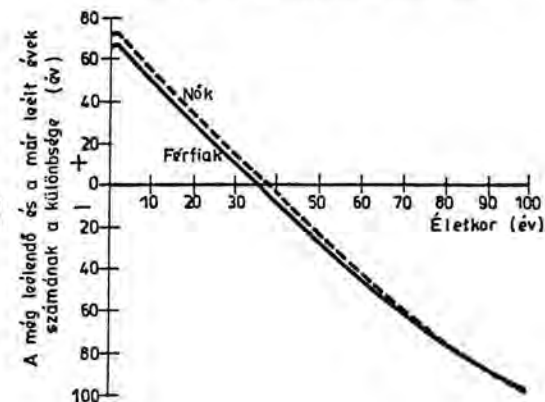
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



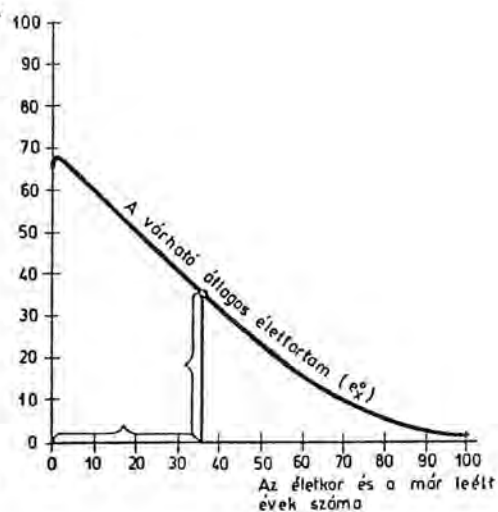
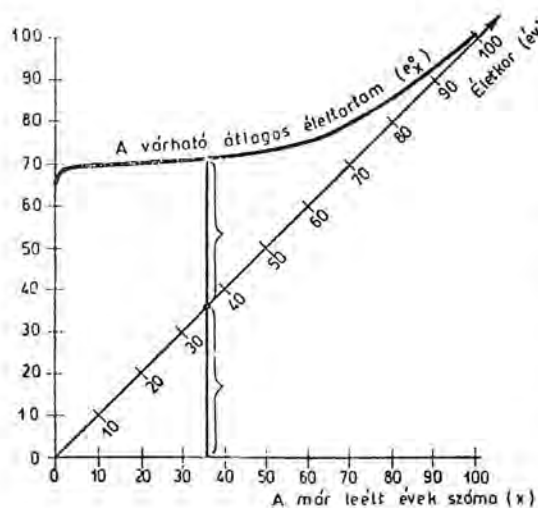
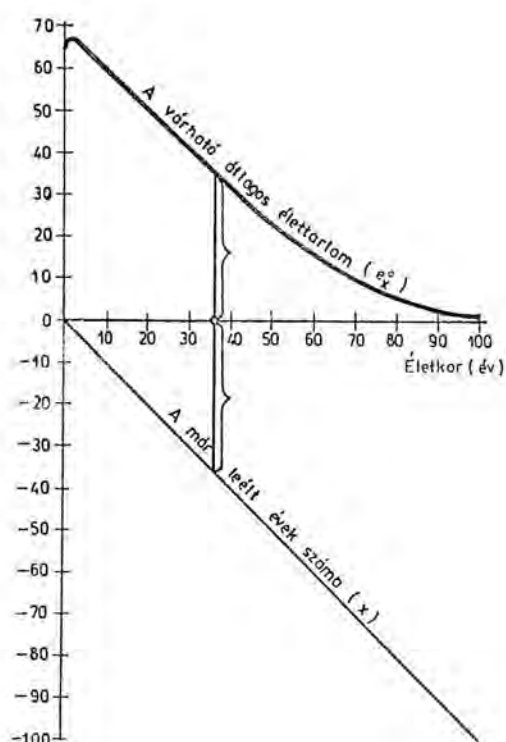
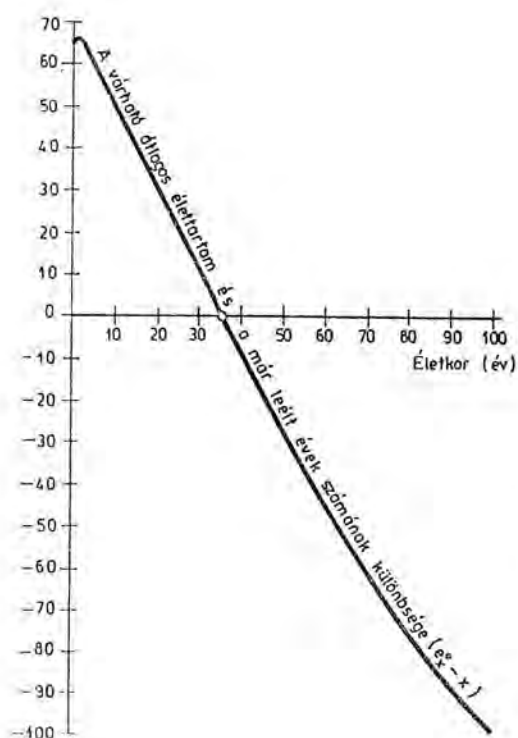
Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



III. 15/b. EGY ÁTLAGOS TOVÁBBÉLŐ ÁLTAL MÉG LEÉLENDŐ ÉS AZ ÁLTALA MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMA EGYENLŐVÉ VÁLÁSÁNAK NÉHÁNY GRAFIKUS SZEMLÉLTETÉSE MAGYARORSZÁG FÉRFI NÉPESSÉGE 1959-1960. ÉVI HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN



$$= \frac{\frac{1}{2} \left[L_x (x + e_x^0) \right]}{2} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} x^2 d_x}{2} = \frac{\frac{1}{2} \left[e_0^0 (x + C^2) T_0 \right]}{2}$$

elérése életkorának a szokásos módszerrel történő meghatározását jelenti a halandósági táblából számított, a $T_x + T_{x+1} / 2$ értékek 0 éves kortól magasabb életkorok felé haladó kumulatív összegezését tartalmazó

$$\sum_{x=0}^{x=x} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)$$

jelzésű oszlopának az adatai alapján. Ez az összes eddigi nevezetes életkorok közül a legalacsonyabb életkor némileg magasabb ugyan a kedvezőbb halandóságu nők, mint a férfiak esetében, a halandóság szintje süllyedésének, vagyis a születéskor várható átlagos élettartam növekedésének a hatására bekövetkező emelkedése - századunk kezdetéig visszanyuló összehasonlítások alapján - szintén minden kétséget kizáróan kimutatható. Könnyen belátható egyébként, hogy a fentiekben vázoltakkal analóg módon meghatározható a táblabeli stacionér népesség teljes életpotenciálja egynegyede, kétharmada, háromnegyede stb. elérésének az életkora is és megvizsgálható, hogyan hat alakulásukra a halandósági szintnek, illetve a halandóság valamely egyéb, a halandósági tábla alapján kitapintható jellemzőjének az alakulása.

A továbbélők által leélt évek száma maximálissá válása életkorának (a 3.3 tábla 14. sora adatainak) a kiszámítása ez

$$y = x l_x$$

függvény maximumának a meghatározása útján történt a

$$x_{\max} + \frac{x l_{x \max} - x l_{x \max} - 1}{2 x l_{x \max} - x l_{x \max} + 1 - x l_{x \max} - 1}$$

formulának a felhasználásával, vagyis a halálozások öregkori modális életkora (a normálkor) már bemutatott meghatározásának az analógiájára. Az $y = x l_x$ függvény maximumát természetesen számos egyéb módszerrel is meg lehet határozni. Egyik meghatározási módja például annak a koordináta rendszer origójából kiinduló (illetve azon áthaladó) egyenesnek és a l_x görbének a metszéspontjához tartozó abszcissza értéknek a meghatározására vezethető vissza, mely metszéspontban a l_x görbéhez húzott érintő az origóból kiinduló (illetve azon áthaladó) egyenesre éppen merőleges.* A vonatkozó adatokból és ábrákból (III. 16/a, és III. 16/b. ábra) kitűnik, hogy ez az életkor magasabb a férfiakénál kedvezőbb halandóságu nők, mint a férfiak esetében és emelkedik, ha a halandóságnak a szintje süllyed, vagyis ha a születéskor várható átlagos élettartam nő. Minthogy bizonyítás nélkül is belátható,

*E meghatározási módra szíves szóbeli információ formájában dr. Vincze István professzor ur hívta fel a figyelmet, amiért ezuton is köszönetet mondok.

hogy a továbbélők által leélendő éveknek a száma a 0 éves egzakt életkorban maximális (és ω éves korban zérus), a meghaltak által leélt éveknek a száma pedig ω éves korban maximális (és a 0 éves egzakt életkorban zérus), ezeknek az életkoroknak a meghatározását és vizsgálatát nem tekintettük feladatunknak.*

A bemutatott nevezetes életkorok kiszámításában jelentős szerephez jutott a valamely életkorig továbbélők által, a valamely életkorig meghaltak által, illetve a valamely életkorig továbbélők és meghaltak által leélt évek számának, illetve ezek különbségeinek a figyelembevétele. Jogosnak tűnhetik ezért arra irányuló kíváncsiságunk, hogy tekinthető-e a valamely életkorig továbbélők által leélt évek számának egy átlagos továbbélőre jutó hányada az adott életkorig továbbélők átlagos életkorának, a valamely életkorig meghaltak által leélt évek számának egy meghaltra jutó hányada az adott életkorig meghaltak átlagos életkorának és ha igen, van-e különbség e két átlagos életkornak a természete között?

Legyen a valamely 0 éves és ω éves egzakt életkorok közötti életkor, és a korábban kifejtettek értelmében, a l_a az ezen életkorig továbbélők által leélt éveknek a száma. Könnyen belátható, hogy az a -éves korig továbbélők átlagos életkora

$$\frac{a l_a}{l_a} = a,$$

továbbá, hogy egy olyan átlag, mely az átlagolandó értékeknél egybeesik, mely közül az átlagolandó értékeknek nincsen szóródása. Könnyen belátható azonban az is, hogy az a -éves korig meghaltak által leélt évek számának egy meghaltra jutó hányada, vagyis

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x - a l_a}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}$$

nem ilyen, az átlagolandó értékekkel egybeeső átlag.

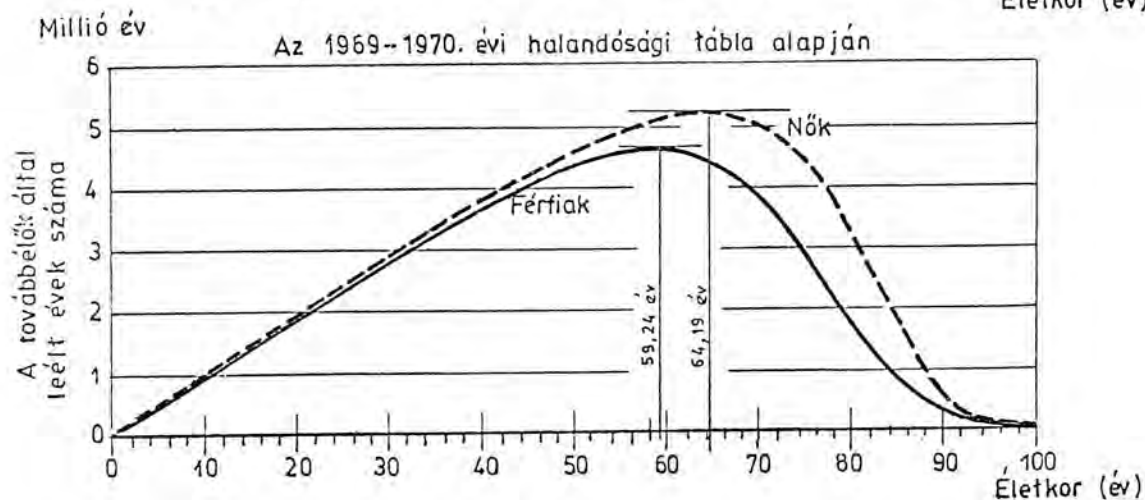
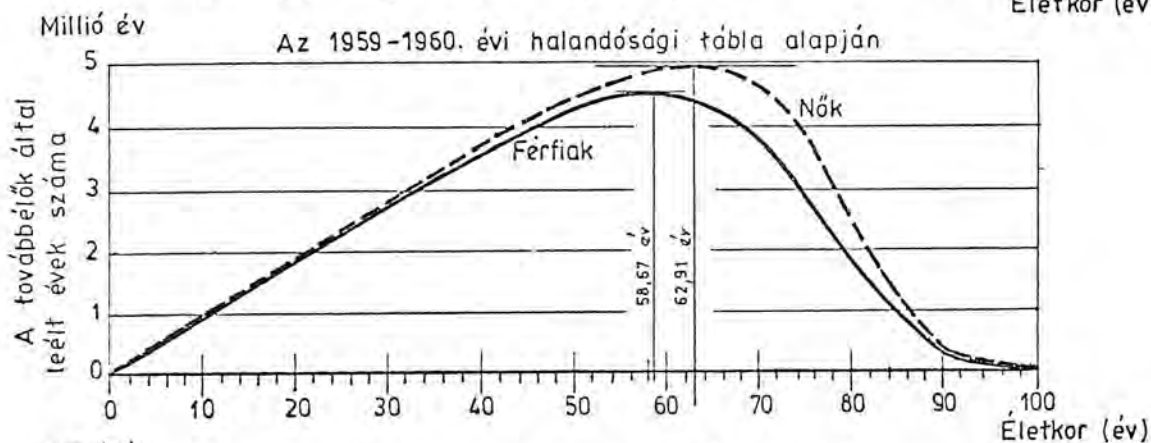
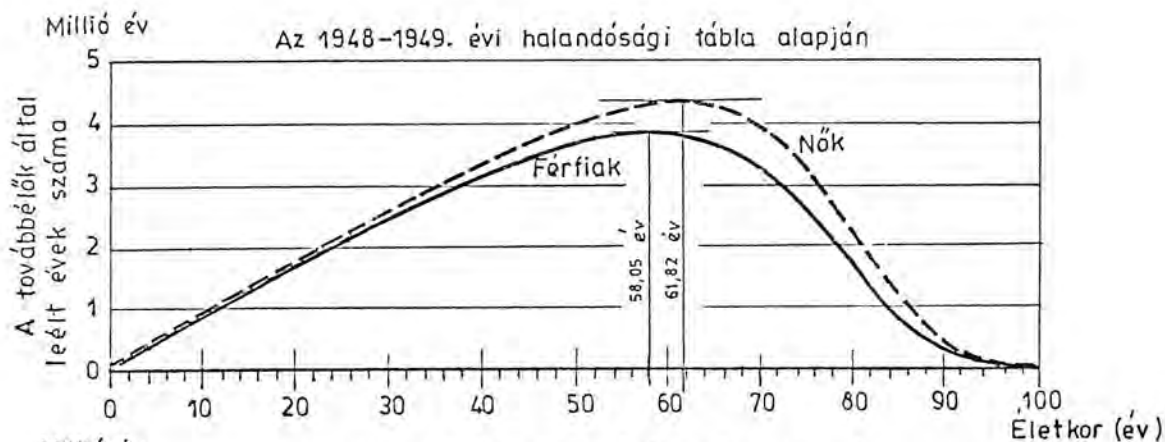
Hogyan bizonyítható, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^a L_x - a l_a}{\sum_{x=0}^a d_x} = \frac{\sum_{x=0}^a x d_x}{\sum_{x=0}^a d_x},$$

vagyis, hogy a meghaltak által valamely tetszőleges a -éves korig leélt évek számának és az ezen életkorig meghaltak számának a hányadosa egyenlő az a -éves korig meghaltaknak az átlagos életkorával?

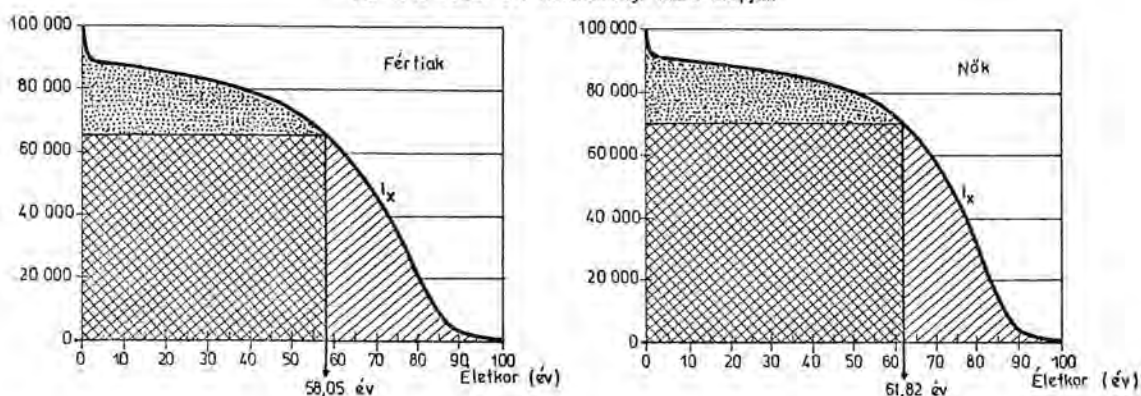
* Megjegyezzük, hogy az ω éves kornak a halandóság evolúciójával kapcsolatos kitolódásáról a közelmúltban Hervé le Bras tett közzé figyelemre méltó tanulmányt (56).

III. 16/a. A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL LEÉLT ÉVEK SZÁMÁNAK ($\times 1_x$) ALAKULÁSA
A KOR ELŐREHALADÁSÁVAL MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE
1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

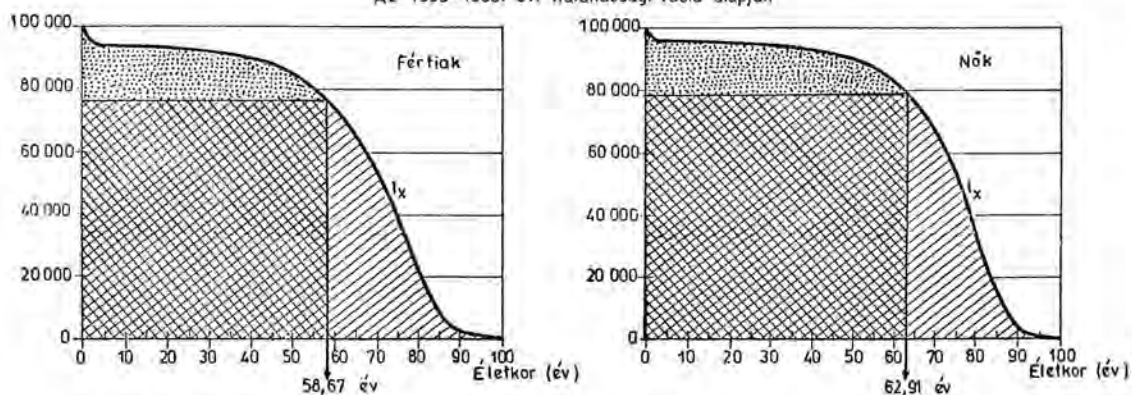


III. 16/b. A TOVÁBBÉLÉSI REND l_x GÖRBÉJE ÉS A KOORDINÁTA TENGELYEK ÁLTAL HATÁROLT ÖSSZTERÜLET (T_0) HÁROM KÜLÖNBÖZŐ ALAKU TERÜLETRE TÖRTÉNŐ FELOSZTÁSA AZON ÉLETKOR ALAPUL VÉTELÉVEL, MELYEK ELÉRÉSEKOR A TOVÁBBÉLŐK ÁLTAL MÁR LEÉLT ÉVEK SZÁMÁT SZEMLÉLTETŐ TERÜLET MAXIMÁLIS NAGYSÁGU MAGYARORSZÁG FÉRFI ÉS NŐI NÉPESSÉGE 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi HALANDÓSÁGI TÁBLÁJA ALAPJÁN

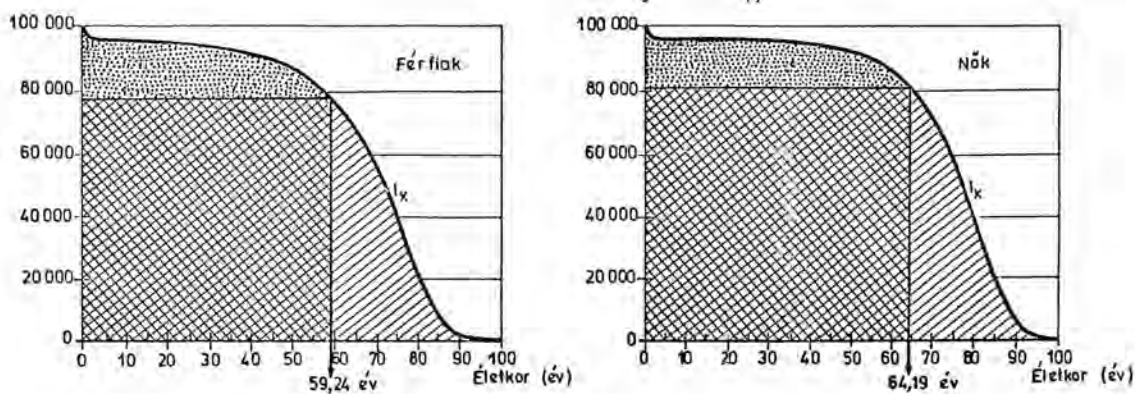
Az 1948-1949. évi halandósági tábla alapján



Az 1959-1960. évi halandósági tábla alapján



Az 1969-1970. évi halandósági tábla alapján



 A meghaltak által már leélt évek száma

 A továbbélők által már leélt évek száma

 A továbbélők által még leélendő évek száma

A fenti egyenlőségben szereplő nevezőknek $(\sum_{x=0}^a d_x)$ az azonossága folytán a bizonyítás a számlálók azonossága bizonyításának a feladatává egyszerűsödik, vagyis csupán a

$$\sum_{x=0}^a L_x - a l_a = \sum_{x=0}^a x d_x$$

egyenlőség fennforgását kell bebizonyítanunk. Könnyen belátható, hogy

$$\sum_{x=0}^a L_x - a l_a = (L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_{a-1}) - a l_a,$$

s hogy

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^a L_x &= L_0 + L_1 + L_2 + \dots + L_{a-1} = \\ &= \left[(L_0 - l_a) + l_a \right] + \left[(L_1 - l_a) + l_a \right] + \left[(L_2 - l_a) + l_a \right] + \dots + \left[(L_{a-1} - l_a) + l_a \right] = \\ &= \left[(d_{a-1} + \dots + d_2 + d_1 + 0,5 d_0) + l_a \right] + \left[(d_{a-1} + \dots + d_2 + 0,5 d_1) + l_a \right] = \\ &+ \left[(d_{a-1} + \dots + 0,5 d_2) + l_a \right] + \dots + (0,5 d_{a-1} + l_a) = \\ &= \left[(d_{a-1} + \dots + d_2 + d_1 + 0,5 d_0) + (d_{a-1} + \dots + d_2 + 0,5 d_1) \right] + \\ &+ \left[(d_{a-1} + \dots + 0,5 d_2) + \dots + 0,5 d_{a-1} \right] + a l_a = \\ &= \left[(0,5 d_0 + 1,5 d_1 + 2,5 d_2 + \dots + (a - 0,5) d_{a-1}) \right] + a l_a = \\ &= \sum_{x=0}^a x d_x + a l_a, \end{aligned}$$

vagyis

$$\sum_{x=0}^a L_x = \sum_{x=0}^a x d_x + a l_a,$$

következésképpen

$$\sum_{x=0}^a L_x - a l_a = \sum_{x=0}^a x d_x$$

és

$$\frac{\sum_{x=0}^a L_x - a l_a}{\sum_{x=0}^a d_x} = \frac{\sum_{x=0}^a x d_x}{\sum_{x=0}^a d_x},$$

vagyis a meghaltak által valamely tetszőleges a -éves korig leélt évek számának és az ezen életkorig meghaltak számának a hányadosa valóban egyenlő az a -éves korukig meghaltaknak az átlagos életkorával,

Érdekes mutatója a halandósági táblának a $\sum_{x=0}^{x=\omega} x d_x / \sum_{x=0}^{x=\omega} d_x$ mutató is, mely

azt méri, hogyan alakul az életkor előrehaladásával a halandósági tábla meghaltjainak az átlagos életkora. ω éves korban e mutató értéke azonosul a születéskor várható átlagos élet-

tartamnak (e_0^0) az értékével, ugyanis $e_0^0 = \sum_{x=0}^{\omega} x d_x / \sum_{x=0}^{\omega} d_x$. Kérdés, hogy van-e a

0 éves és az ω éves egzakt életkorok által határolt intervallumban más olyan életkor is, amikor a két mutató értéke azonosul egymással. Ha van, akkor hogyan módosul a halandósági szint (e_0^0) változásának a hatására?

Érdemes lenne megvizsgálni továbbá, hogy

1. A születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) mely értéke mellett válik egyenlővé a továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt T_0 terület a halandóságból adódó élettartamveszteséggel, vagyis mely életkornak az elérésekor következik be, hogy $\omega l_0 = T_0$? Ez a halandósági szint csak $e_0^0 = 50$ év, vagy más szint is lehet, ha $\omega l_0 = 100 l_0$, vagyis ha $\omega = 100$?

2. Melyik életkorban azonosul a továbbélők által már leélt éveknek a száma a halandóságból adódó élettartamveszteséggel, vagyis mely életkornak az elérésekor következik

be, hogy $\left(x l_0 - \sum_{x=0}^{x=x} L_x \right) = x l_x$? (Ez az életkor a halandósági szint süllyedésének (az e_0^0 növekedésének) a hatására feltehetően süllyed.)

3. Melyik életkorban azonosul a meghaltak által leélt éveknek a száma a halandóságból adódó élettartamveszteséggel, vagyis mely életkornak az elérésekor következik be,

hogy $\left(x l_0 - \sum_{x=0}^{x=x} L_x \right) = \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right)$?

4. Melyik életkorban válik egyenlővé a továbbélők által még leélt éveknek a száma a halandóságból adódó élettartamveszteséggel, vagyis mely életkornak az elérésekor kö-

vetkezik be, hogy $\left(x l_0 - \sum_{x=0}^{x=x} L_x \right) = T_x$?

5. Melyik életkorban válik egyenlővé a halandóságból adódó eddigi élettartamveszteség a jövőbenivel, vagyis mely életkornak az elérésekor következik be, hogy

$$\left(x l_0 - \sum_{x=0}^{x=x} L_x \right) = \left[(\omega - x) l_0 - \sum_{x=x}^{\omega} L_x \right] ?$$

6. Melyik életkorban válik egyenlővé a továbbélők által még leélendő éveknek a száma a halandóságból adódó jövőbeni élettartamvesztéssel, vagyis mely életkornak az elérés

sekor következik be, hogy
$$\left[(\omega - x) l_0 - \sum_{x=x}^{x=\omega} L_x \right] = T_x ?$$

Az eddigiek során a 0 és az ω éves egzakt életkorok közötti intervallum, az $\int_0^{\omega} l_0 d_{(0)}$ összterület valamely speciális jelentésű részterülete vált egyenlővé valamely másik speciális jelentésű összterületével, könnyen belátható azonban, hogy két speciális jelentésű összterületnek az összege is azonosulhat egy harmadikéval, illetve két további speciális jelentésűével.

Érdeemes lenne megvizsgálni, hogy pl. melyik az a halandósági szint, mely mellett az ujszülöttek várható valószínű élettartama $\omega / 2$ évet (közelítőleg 50 évet) tesz ki.

A halandósági tábla alapján számítható statisztikai középértékekkel kapcsolatos fenti eszmefuttatásaink korántsem tekinthetők kimerítő jellegűeknek. Legtöbbjüknek a rendelkezésünkre álló összes hazai halandósági tábláknak a felhasználásával való kiszámítása sem fejeződött még be, ez pedig feltétele a halandóság szintje, illetve a születéskor várható átlagos élettartam hosszabb távon megfigyelhető és nagyobb arányú változásaival együttjáró módosulásaik behatóbb elemzésének. Részint e mutatóknak a kiszámítása kapcsán, részint a két egzakt korév között meghaltak által leélt évek száma egy meghaltra jutó hányada Nathan Keyfitz és Wilhelm Flieger által bevezetett mutatója (57) értékének az alakulásával kapcsolatos vizsgálatainknak a hatására a halandósági tábla számos további új, nem középérték jellegű mutatóját sikerült matematikailag definiálnunk és kiszámítanunk, amiről szintén egy későbbi tanulmányunkban szándékozunk számot adni.

A halandósági tábla alapján számítható középértékeknek a halandóság jellemzőiként való interpretálása születési kohorszok (generációk) halandósági táblái esetében, hacsak a népesség nem stacionér, mindig könnyebb és természetesebb, mint a fiktív születési kohorszoknak a halandóságát leíró transzverzális halandósági táblákban. A kohorsz halandósági tábláknak a kiszámítása azonban még törlesztendő adósságaink közé tartozik. Az ilyen halandósági táblák kiszámítását sürgető ujabban hangoztatott érvek közül kétségtelenül figyelmet érdemel az az érv is, hogy az elhalálozás egyes naptári években megfigyelhető kockázata (valószínűsége) az egyes születési évjáratokban (generációkban) nem független az utóbbiaknak a múltjától. Nem független az egyes generációkban megfigyelhető multbeli halálozásoktól sem, mint ahogyan egy házassági kohorsz valamely naptári év alatti termékenysége sem független az általa korábban szült gyermekeknek a számától. A korábban pestis által sújtott generációk e halálokból adódó halandósága például - az immunitás következtében - kedvezőbb, mint a pestis által nem sújtottaké stb. Figyelembe veendő az is, hogy az orvostudomány és a higiéné fejlődése a természetes kiválasztódás érvényesülését az egyes generációkban különböző mértékben befolyásolta, továbbá az is, hogy a háborúkban katonaként, hadi -

fogolyként, deportáltaként stb. résztvevők aránya is különböző az egyes generációkban, s e legtöbbnyire több éven át érvényesülő kedvezőtlen hatások kétségtelenül éreztetik hatásukat az érintett generációknak a későbbi halandóságában. Nem becsülhető le ezzel kapcsolatban annak az érvnek a súlya sem, hogy a már kedvezőnek (alacsonynak) tekinthető halandósági szint esetében az élet meghosszabbításáért vívott küzdelem egyre inkább az idősebb korosztályok népességének a fokozottabb védelmére koncentrálódik s az ő esetükben a halandóságot befolyásoló multnak, éppen koruknál fogva, nagyobb a jelentősége, mint a fiatalabbak esetében. Valóban szükség lenne tehát a születési évjáratok (generációk) halandósági tábláinak a kidolgozására, s helytelenül járnak el azok, akik a különböző ellenérvek és nehézségek hangoztatásával konzervatívan a transzverzális halandósági táblák létjogosultságának a kizárólagosságát hangoztatják (58). Egy további érv a kohorsz halandósági táblák kidolgozása mellett annak a felismeréséből adódik, hogy maga a potenciális demográfia, melynek tanulmányunk két mutatóját is bemutatta, a jelentősnek mondható kezdeti sikerek után éppen azért nem terjedt el széleskörűen és azért nem is fejlődött tovább, mert a kohorsz-módszerű elemzéseknek a gyors térhódítása és a halandóságra való kiterjesztése alapján kétségbe vonhatóvá vált, hogy valamely népességnek az életpotenciálja a transzverzális halandósági táblák x éves korban várható átlagos élettartam-értékeinek a birtokában korrekt módon becsülhető. Megfelelő számú kohorsz halandósági tábla birtokában ez az aggály természetesen tárgytalanná válna és ismét felvethető lenne a valamely időpontban megfigyelt tetszőleges népesség teljes életpotenciálja kiszámításának a gondolata is.

Megfelelő számú, vagyis a népességet alkotó férfi és női születési évjáratok (generációk) számával azonos mennyiségű halandósági táblának a birtokában többek között elemezhetővé válna a születéskor várható átlagos élettartam, az újszülöttek valószínű élettartama (és halálozási kora), a normálkor, a táblabeli stacionér népesség átlagos életkora és átlagos halálozási kora, valamint az értekezésünk e fejezetében bemutatott többi statisztikai középértéke, a kohorsz halandósági táblák és a transzverzális halandósági tábla alapján számítható nagyságainak a kapcsolata is, aminek elvi-módszertani és prognosztikai jelensége egyaránt kétségbevonhatatlan.

A bemutatott középértékek zöme - mutatis mutandis - egyéb népmozgalmi jelenségeknek a táblamódszerű elemzésében is alkalmazható. Bizonyos nehézségeket ezzel kapcsolatban elsősorban az a körülmény támaszt, hogy az un. egyéb jelenségek esetében - a halandóságtól eltérően - a vonatkozó események bekövetkezésének az érintett kohorszokon belüli intenzitása nem 100 %-os (a házasságkötési táblákban például nem minden a házasságkötés kockázatának kitett személy köt házasságot). *

A bemutatott középértékek és a kiszámításukkal kapcsolatos különféle megállapítások és megfontolások közvetlenül is felhasználhatók a stacionér népesség néhány újabb tulajdonságának a konstatálására és matematikai megfogalmazására, de érdemes lenne meg-

*-----
 * Az ebből a körülményből adódó néhány nehézségre szíves szóbeli információ formájában Chantal Blayo hívta fel figyelmemet, amiért ezuton is köszönetet mondok.

vizsgálni az e középértékek kiszámítása során felmerülő megállapítások némelyikének a módosulásait azonos halandósági szintű stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességeknek az alapul vételével is.^{*}

Értekezésünk e fejezetében a stacionér népesség elméletének a továbbfejlesztése céljából elemeztük a halandósági tábla alapján számítható statisztikai középértékeket és a közöttük fennálló kapcsolatokat. Meg kell azonban jegyeznünk, hogy bár a halandósági tábla a népességtudomány legrégebbi elemzési eszközei közé tartozik, őszinte elismerést vált ki ennek az elemzési eszköznek a napjainkban észlelhető másirányú rohamos továbbfejlődése is. A táblák kidolgozásának a technikáját illetően a logit módszerű táblákat első ízben kidolgozó William Brass-on (60) és az öt módszertani és az alkalmazási lehetőségek tekintetében továbbfejlesztő Guillaume Wunsch-on (61) kívül, Le Bras már idézett tanulmányát (56) és Josianne Duchene egyik újabb tanulmányát (62) kell ezzel kapcsolatban említenünk.^{**} Tematikai vonatkozásban elsősorban a halandóság indirekt mérési módszerei Louis Henry egy 1960-ban publikált tanulmánya (63), valamint William Brass és K. Hill egy 1973-ban közzétett tanulmánya (60) által inspirált, Sully Ledermann halandósági tábla-típusainak (64) a felhasználásán alapuló továbbfejlesztésének lehetünk a tanúi (65), de elismeréssel kell említenünk a férfiak és a nők halandósági szintje összehasonlítási módszereinek az ujabban megfigyelhető jelentős fejlődését, elsősorban a halandósági függvény konvexitásának a mérésére szolgáló H mutató értéke kiszámításának és interpretálásának Nathan Keyfitz és Antonio Golini egy, a Nora Federici által szerkesztett Genus-ban megjelent tanulmányában (66) található részletes leírását is.

Értekezésünk e fejezete - mint jeleztük - a stacionér népesség elméletének gazdagítása céljából gyarapítja a halandósági tábla alapján számítható statisztikai középértékeknek a körét és csak igen szerény hozzájárulás kíván lenni a népességtudomány e legrégebbi elemzési eszközének a napjainkban észlelhető többirányú és igen gyorsütemű továbbfejlesztéséhez.

^{*}

A stabil népesség elméletének a felsőbb matematika igénybevételén alapuló magyarnyelvű kifejtését lásd a dr. Szabady Egon által szerkesztett "Bevezetés a demográfiába" c. kézikönyv dr. Theiss Ede által írott vonatkozó fejezetében (59) és Tekse Kálmán 1975-ben kiadott, már idézett, speciálisan ezzel a kérdéssel foglalkozó magasszínvonalú monográfiájában (3). Matematikailag diszkrét formában történő viszonylag egyszerű tárgyalása e tanulmány szerzőjének egyetemi jegyzeteiben (11, 29) és - természetesen - ezen értekezés első fejezetében is megtalálható.

^{**}A logit módszerű halandósági táblákat Tekse Kálmán idézett monográfiája (3) is ismerteti.

5. A stacionér szubpopulációk és a stacionér gazdálkodást folytató stacionér népesség gazdasági jellemzőinek kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása

Annak, hogy valamely stacionér népességen belül a különféle ismérvek alapján definiálható alnépességek (szubpopulációk) is stacionérek legyenek - mint már jeleztük - az a feltétele, hogy ezen alnépességek korszecifikus arányszámai a népességet alkotó összes férfi és női születési évjáratokban azonosak legyenek. Ennek a feltételnek a teljesülése feltételezi a vonatkozó népmozgalmi események, illetve a vonatkozó szubpopulációkhoz tartozás állapotában leélt évek száma a népességet alkotó férfi és női születési évjáratokban megfigyelhető egy főre jutó un. longitudinális összegeinek és ez utóbbiak életkor, illetve különböző naptári időszakok szerinti megoszlásának (naptárának) az azonosságát. E feltétel teljesítése esetében - ha maga az össznépesség is stacionér - stacionérek lesznek a vonatkozó szubpopulációk is és természetesen a megfelelő népmozgalmi, gazdasági, szociális stb. események is.

A szóban forgó feltétel teljesítése esetében időben változatlanok lesznek a vonatkozó népmozgalmi események, illetve szubpopulációk korszecifikus arányszámainak az un. transzverzális összegei és transzverzális naptárak is és azonosulnak a népességet alkotó egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető, egymással szintén azonos longitudinális összegeikkel és longitudinális naptáraikkal.

A népmozgalmi, illetve gazdasági jelenségek, valamint a különféle demográfiai, gazdasági stb. ismérvek alapján kialakítható szubpopulációk stacionér jellegűvé válása e feltételének a mélyebb megértése céljából vizsgáljuk meg, hogyan függ e jelenségek, illetve szubpopulációk korszecifikus arányszámainak a transzverzális összege és transzverzális naptára longitudinális összegüktől és ez utóbbi naptárától. Ezeknek az összefüggéseknek a megértése azért is fontos, mert a demográfusok többsége ma már egyetért abban, hogy a különféle nyers és tisztított népmozgalmi arányszámok a népesség, ill. a vonatkozó szubpopulációk korösszetételétől való függésük miatt nem a legmegfelelőbb eszközei a transzverzális demográfiai elemzésnek sem és felveti a kérdést, hogy melyik az a mutató, mely a népmozgalmi jelenségek transzverzális elemzésére a legmegfelelőbb és hogyan végezhető el ezen mutató értékének az alakulásával kapcsolatban a transzverzális és a longitudinális demográfiai elemzés összekapcsolása?

A demográfusok többsége egyetért abban, hogy a népmozgalmi jelenségek színvonalának a mérésére szolgáló transzverzális mutatók közül a legmegfelelőbbek azok, amelyeket a vonatkozó események un. második kategóriába tartozó korszecifikus arányszámainak az összegezése után nyerünk. E mutatókat a L. Henry (67, 68, 69, 70, 71, 37) és R. Pressat (12, 13, 21, 72, 73, 74) által használt elnevezésük analógiájára a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszecifikus arányszámait transzverzális összege mutatóinak (pl. az általános korszecifikus termékenységi arányszámok transzverzális összege mutatójának stb.) nevezhetjük. A korrekt elnevezés kialakításánál is fontosabb azonban annak a tisztázása,

hogyan a mérés, melyek eredményeként e mutatók értékeit megkapjuk fiktív kohorszokban, a halandóság hatásának a figyelembevétele nélkül történik. Fontos továbbá a két alábbi félreértés elkerülése is:

1. E mutatók értékei függetlenek a népesség korösszetételének a hatásától.*

2. E mutatók azt fejezik ki, hogy mekkora lenne a vonatkozó események egy lakosra jutó élettartam alatti végső össznagysága, ha életüket az adott év, vagy egymással szomszédos két, három stb. év feltételei mellett élnék le.

E mutatók értékei nem függetlenek a népesség korösszetételének a hatásától. Ezek az értékek standardizálási eljárással kiszámított mutatóknak az értékei és arról van csupán szó, hogy a kiszámításuk során alkalmazott standard korstruktúrára specifikus jellegű korstruktúra, amennyiben feltételezzük, hogy minden egyes korévhez, ill. korcsoporthoz a népességnek ugyanakkora hányada (%-a) tartozik. Képzeljük el ezen értékek kiszámítását a halandósági tábla felhasználásával történő számításoknak az analógiájára. Induljunk ki az élveszültek szokásos 100 000 főt kitevő számából (mint a tábla gyökéből) és tételizzük fel, hogy ezen újszülöttek közül 100 éves koruknak az eléréséig nem hal meg senki, akkor viszont egyszerre mindenki meghal. Ebben az esetben a továbbélők száma 0-tól 100 éves korig minden egyes egzakt korévig egyaránt 100 000, az egyes korévek népességszáma szintén 100 000, az ötéves korcsoportok népességszáma 500 000 stb. fő lenne. Az átlagos élettartam kerekén 100 év, az ezen feltételek mellett kialakuló stacionér népesség összlétszáma $100\,000 \times 100 = 10\,000\,000$ fő lenne. Az egyes korévek népességszáma az össznépesség 1%-át, az ötéves korcsoportoké 5%-át stb. tenné ki. A népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámok transzverzális összege mutatóinak az értékei azonosak lennének az ezen stacionér népesség egy átlagos reprezentánsa által a születéskor várható értékek nagyságával. Arról van tehát csupán szó, hogy a standardizálás itt egy specifikus korösszetételű stacionér népesség korstruktúrájának az alapulvételével történik, melyben azonos az egyes korévek (korcsoportok) népességének az abszolút száma és az össznépességben belüli aránya is.

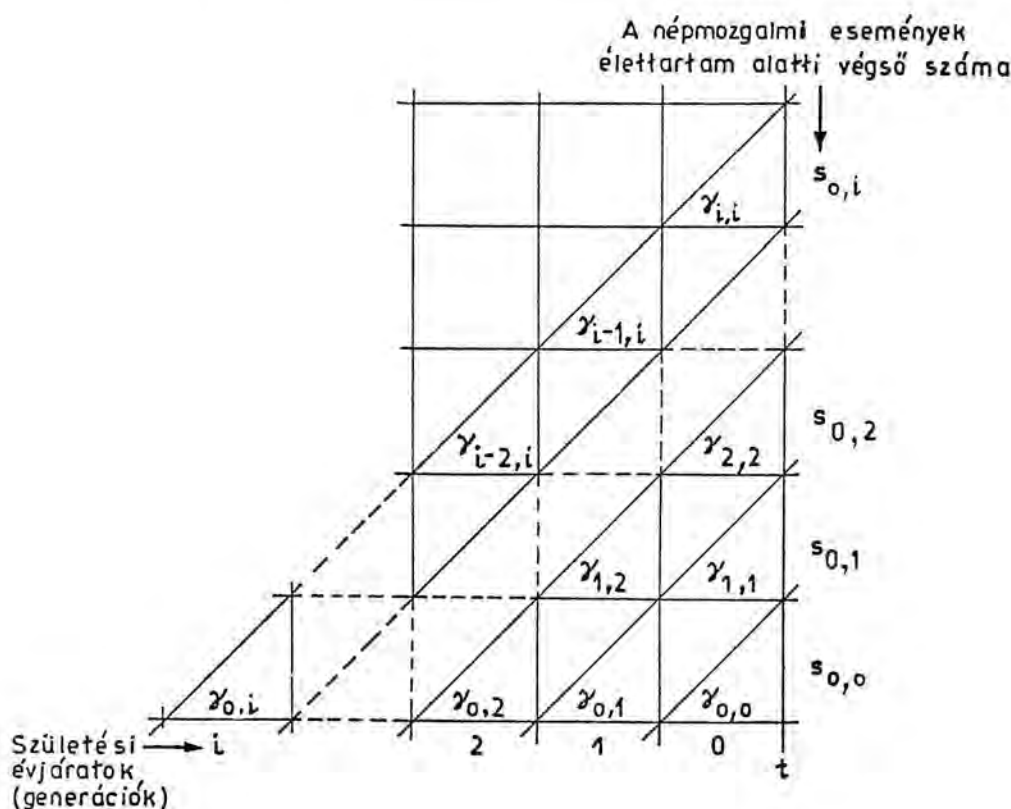
Nem állítható az sem, hogy ezek a mutatók azt fejezik ki, hogy mekkora lenne a vonatkozó népmozgalmi események egy átlagos ember élettartama alatti végső össznagysága, ha életünket az adott év, vagy egymással szomszédos két, három stb. év feltételei mellett élnék le. Pontosabban fogalmazunk, ha csupán azt mondjuk, hogy ezek a mutatók valóban a vonatkozó események egy átlagos ember élettartamára vonatkoztatott össznagyságait mutatják, ha ez az átlagos ember életét úgy élné le, hogy minden életkorban (korcsoportban) olyan mértékben produkálná a vonatkozó népmozgalmi eseményeket, mint amilyen mérték-

*Ezt az álláspontot képviseli pl. a gazdaságilag aktív bruttó élettartam mutatójának a jellemzése kapcsán Johan D. Durand és Ann. R. Miller a Nemzetközi Népeségtudományi Unió 1961. évi Londoni Kongresszusára beküldött egyébként igen értékes dolgozata (75).

ben az az adott időszakban az egyes korévekben (korcsoportokban) egy átlagos emberre jellemző volt.

Számolnunk kell azzal is, hogy a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámok transzverzális összege mutatója értékének az időbeli változása nemcsak attól függ, hogy miként változnak a vonatkozó népmozgalmi eseményeknek a megfigyelési időpontokban számbavett tényleges kohorszokat jelképező átlagember élettartama alatti végső össznagyságai, hanem attól is, ahogyan ezen végső össznagyságoknak ezen átlagemberek életkora szerinti megoszlása, más szavakkal: (angolul: "timing"-je) változik. Roland Pressat nyomán, aki ezt a problémát a korszpecifikus termékenységi arányszámok transzverzális összege és az ebből képzett bruttó reprodukciós együttható időbeli változásának a helyes interpretálása kapcsán vázolja fel (12, 13, 21, 72, 73, 74) induljunk ki a szintén demográfiai hálózat felhasználásával készült mellékelt III. 17. ábrából:

III. 17. A NÉPMOZGALMI ESEMÉNYEK ÉLETTARTAM ALATTI VÉGSŐ SZÁMA ÉS NAPTÁRA A KÜLÖNBÖZŐ SZÜLETÉSI ÉVJÁRATOKBAN (GENERÁCIÓKBAN)



Az ábrán a 0, az 1, a 2, és az i - a korábbi ábrákhoz hasonlóan - a különböző születési kohorszokat (generációkat) jelzik. A $s_{0,0}$, $s_{0,1}$, $s_{0,2}$... $s_{0,i}$ szimbólumok a különböző népmozgalmi eseményeknek a vonatkozó kohorszok egy átlagos képviselőjének az élettartamára jutó végső össznagyságait jelentik. Ez utóbbiak a népmozgalmi események

második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak tényleges kohorszokra vonatkoztatott, vagyis longitudinális összegei. Ezek a halandóság hatásának a figyelembevétele nélkül kiszámított értékek a vonatkozó jelenségek intenzitásának, ill. gyakoriságának a mértékül is szolgálhatnának az érintett tényleges kohorszokra vonatkozóan. Az ábrán az indexekkel ellátott γ -k jelzik ezen nagyságoknak a tényleges kohorszokat jelképező átlagember élettartama alatti megoszlását (naptárát). Az i -vel jelzett születési kohorszot jelképező átlagember az egész élete alatt produkált valamely népmozgalmi esemény p_i -vel jelzett össz nagysága például úgy oszlik meg élete folyamán, hogy ebből a 0-éves korában $\gamma_{0,i}$, egy éves korában $\gamma_{1,i}$, két éves korában $\gamma_{2,i}$ stb. hányadot valósít meg. Könnyen belátható, hogy a naptár ezen elemeinek a longitudinális összege valamennyi jelenség esetében valamennyi kohorszban egyenlő eggyel:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \gamma_{x,i} = 1.$$

A jelenségek, ill. események egy lakosra vonatkoztatott intenzitása, ill. nagysága vagyis második kategóriába tartozó arányszáma x -éves korban az i -vel jelzett születési évjáratban (generációban) tehát:

$$\gamma_{x,i} \cdot s_{0,i}.$$

A népmozgalmi események valamely időszak (pl. naptári év) alatti abszolút száma ennek alapján második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámaik és a vonatkozó korévek népessége évközepi száma szorzatainak az összegeként is felírható:

$$P_{\text{spec.},t} = P_{0,0} \cdot s_{0,0} \cdot \gamma_{0,0} + P_{1,1} \cdot s_{0,1} \cdot \gamma_{1,1} + P_{2,2} \cdot s_{0,2} \gamma_{2,2} + \dots + P_{i,i} \cdot s_{0,i} \gamma_{i,i} + \dots$$

amiből az egy lakosra jutó mennyiség (a vonatkozó nyers népmozgalmi arányszám):

$$\frac{P_{\text{spec.},t}}{P_t} = \frac{P_{0,0}}{P_t} s_{0,0} \gamma_{0,0} + \frac{P_{1,1}}{P_t} s_{0,1} \gamma_{1,1} + \frac{P_{2,2}}{P_t} s_{0,2} \gamma_{2,2} + \dots + \frac{P_{i,i}}{P_t} s_{0,i} \gamma_{i,i} + \dots$$

A népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak valamely megfigyelési időszakra vonatkozó transzverzális összege (S) pedig az alábbi formula segítségével határozható meg:

$$S = s_{0,0} \gamma_{0,0} + s_{0,1} \gamma_{1,1} + s_{0,2} \gamma_{2,2} + \dots + s_{0,i} \gamma_{i,i} + \dots = \sum_{i=0}^{\omega} s_{0,i} \gamma_i.$$

Ez az összeg tehát:

- a népmozgalmi eseményeknek a különböző tényleges kohorszokat jelképező átlag-ember élettartama alatti végső össznagyságától ($s_{0,i}$);
- a népmozgalmi események ezen össznagyságainak a különböző tényleges kohorszokban észlelhető kormegoszlástól, naptárától ($\gamma_{x,i}$) függ.

Vizsgáljuk meg ezeketán - szintén Roland Pressat a korszpecifikus termékenységi arányszámok transzverzális összege és a bruttó reprodukciós együttható elemzése kapcsán kifejtett gondolatmenetének az analógiájára -, hogy miként befolyásolja a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámait transzverzális összegének a nagyságát a fenti két tényezőnek az alakulása. Gondoljuk át e célból az alábbi négy helyzetet:

a) A népmozgalmi események össznagysága és naptára minden tényleges kohorszban azonos. Ebben az esetben a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak a transzverzális összegei is változatlanok időben. Ebben az esetben

$$s_{0,0} = s_{0,1} = s_{0,2} = \dots = s_{0,i} = \dots = s_0.$$

Mínt hogy a $\gamma_{x,i}$ ebben a helyzetben független az i kohorsztól $\gamma_{x,i} = \gamma_x$. Ebben a helyzetben a naptár elemeinek nemcsak longitudinális összege, hanem transzverzális összege is egyenlő eggyel. Megállapítható tehát, hogy

$$S = \sum_i \gamma_i \cdot s_0 = s_0 \sum_i \gamma_i = s_0,$$

vagyis a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak a transzverzális összege egyenlő a minden tényleges kohorszban azonos nagyságú longitudinális összegükkel.

Pressat szerint ebben a helyzetben magát a jelenséget is "időbelileg stacionérnek" kell tekintenünk. Ez az alapjában véve helyes megállapítás azonban félreértésekre adhat okot. A stacionér jelleg vonatkoztatható esetleg magukra a népmozgalmi jelenségekre (pl. a termékenységre, a halandóságra, a nupcialitásra stb.), de semmiképpen sem vonatkoztatható az a)-val jelzett szituáció minden esetében sem ama népmozgalmi eseményekre (a születésekre, a halálozásokra, a házasságkötésekre stb.), melyekbe a vonatkozó népmozgalmi jelenségek megnyilvánulnak. A stacionér elnevezéshez ugyanis a demográfián kívül is a minden szempontból való változatlanosság képzeete fűződik. A stacionér népesség - mint láttuk - olyan népesség, melyben a születések és a halálozások évi száma azonos és emiatt időben változatlan a népesség száma is. Változatlan a születések és a halálozások egymással azonos évi számának a változatlan számú össznépességhez viszonyított aránya, vagyis az egymással azonos nyers születési és halálozási arányszám is, mely a születéskor várható átlagos élettartam inverzeként is felfogható. Az ilyen népességben változatlan az egyes korévek, ill.

korcsoportok népességének a száma, s így a korösszetétel is, mely utóbbi kizárólag az elhalálozás, ill. a továbbélés korszpecifikus valószínűségeitől függ stb. Könnyen belátható, hogy ha valamely stacionér népességben a népmozgalmi események korszpecifikus intenzitásai, ill. nagyságai is változatlanok, akkor - minthogy a népességben - mint jeleztük - nemcsak a korösszetétel, hanem az egyes korévek (korcsoportok) népességének az abszolút száma is változatlan - időben változatlan marad a népmozgalmi eseményeknek ezen népesség által produkált összmenyisége is. Ez utóbbival összhangban változatlan a népmozgalmi események a valamely korévhez (korcsoporthoz) tartozók által produkált volumene, a népmozgalmi események összességéhez viszonyított aránya, a népesség összlétszámához viszonyított aránya, ill. az 1, 10, 100, 1 000 stb. lakosra jutó mennyisége is és - természetesen - időben változatlan a második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámaiknak a transzverzális összege is és azonos ezen arányszámok időben szintén változatlan longitudinális összegével. Ebben a helyzetben tehát a népmozgalmi jelenségek és minden olyan nem népmozgalmi jelenség is, melynek második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámai időben változatlanok, valóban minden szempontból stacionér.

Nem minden szempontból stacionérek azonban a népmozgalmi jelenségek, ill. események már a stabil növekvő, ill. stabil csökkenő népességekben sem, akkor sem, ha második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámaik változatlanok, vagyis változatlanok ez utóbbiak transzverzális összegei is és azonosak a szintén változatlan longitudinális összegükkel. Miért? A stabil népesség - mint láttuk - olyan népesség, melyben transzverzálisan megfigyelve a születéseknek és a halálozásoknak a száma, az egyes korévek (korcsoportok) népességének a száma és a népesség összlétszáma időszakról időszakra (pl. évről évre) ugyanabban az irányban és arányban változik. Születési arányszáma, halálozási arányszáma és korösszetétele tehát állandó. Egy ilyen népességben, amennyiben tényleg növekvő vagy csökkenő - változatlanság esetén ti. stacionér népesség lenne - a népmozgalmi események volumenei - második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámaik változatlansága esetén - időszakról időszakra (pl. évről évre) a születések, a halálozások, az egyes korévek (korcsoportok) népessége és az össznépesség számával azonos irányban és arányban változnak, vagyis nem stacionérek. Változatlan az egyes korévek (korcsoportok) népessége által produkált népmozgalmi eseményeknek ezen események összmenyiségéhez viszonyított aránya, vagyis ezen események kormegoszlása, változatlan ezen eseményeknek a népesség összlétszámához viszonyított aránya, ill. az 1, 10, 100, 1 000 stb. lakosra jutó mennyisége stb., de az események összmenyisége nem változatlan, vagyis nem stacionér. Nem változatlan akkor sem, ha a népmozgalmi eseményeknek a különböző tényleges kohorszokat jelképező átlagember élettartama alatti össznagysága (s_0) és a különböző tényleges kohorszokban észlelhető kormegoszlása, naptára (γ_x) változatlan, s ebből adódóan változatlanok e jelenségek második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámai, valamint ezen arányszámok transzverzális összegei is, melyek egybeesnek szintén változatlan longitudinális összegekkel. S ugyanez, ill. hasonló a helyzet a nem modell népességek tarka, igen változatos fejlődési sajátosságokat mutató birodalmában is. Ezért és ennyiben nem fogadhatjuk el e ki-

egészítés nélkül Roland Pressat-nak azt a megállapítását, hogy az a) alatti helyzetben magát a jelenséget is "időbelileg stacionárnak" kell tekintenünk.

b) Képzeljük el most, hogy a népmozgalmi eseményeknek a különböző tényleges kohorszokat jelképező átlagember élettartama alatti össznagyságai kohorszról-kohorszra ugyanannyival, vagyis lineárisan változnak (nőnek vagy csökkennek) ezen össznagyságoknak a különböző tényleges kohorszokban észlelhető kormegoszlásai, naptárai viszont változatlanok maradnak. A változatlan naptárt jelöljük γ_x -szel. Ne feledjük, hogy a naptár elemeinek longitudinális összege és transzverzális összege is egyenlő eggyel.

Értelmezzük a népmozgalmi események élettartam alatti nagyságainak a változását. A vázolt helyzetben

$$\begin{aligned} s_{0,0} &= s_{0,0} + 0 \cdot k s_{0,0} \\ s_{0,1} &= s_{0,0} + 1 \cdot k s_{0,0} \\ s_{0,2} &= s_{0,0} + 2 \cdot k s_{0,0} \\ &\vdots \\ s_{0,i-1} &= s_{0,0} + (i-1) k s_{0,0} \\ s_{0,i} &= s_{0,0} + i k s_{0,0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

ahol k a változás linearitásának a tényezője.

A népmozgalmi események kohorszról-kohorszra lineárisan változó élettartam alatti össznagyságai számtani haladványt képeznek, melyben a két szomszédos tag közötti különbség

$$\begin{aligned} s_{0,1} - s_{0,0} &= s_{0,2} - s_{0,1} = \dots s_{0,i} - s_{0,i-1} = \\ &= \frac{(s_{0,1} - s_{0,0}) + (s_{0,2} - s_{0,1})}{2} = \frac{(s_{0,1} - s_{0,0}) + (s_{0,2} - s_{0,1})}{2} + \\ &+ \frac{\dots + (s_{0,i} - s_{0,i-1})}{i} = \frac{(s_{0,i} - s_{0,0})}{i} = k s_{0,0} \end{aligned}$$

állandó nagysága.

Amennyiben $k s_{0,0} < 0$, a népmozgalmi események élettartam alatti össznagyságai kohorszról-kohorszra nőnek, amennyiben pedig $k s_{0,0} > 0$, kohorszról-kohorszra csökkennek.

Könnyen belátható, hogy

$$\begin{aligned}
 s_{o,1} &= \frac{s_{o,0} + s_{o,2}}{2} \\
 s_{o,2} &= \frac{s_{o,1} + s_{o,3}}{2} \\
 &\vdots \\
 s_{o,i} &= \frac{s_{o,i-1} + s_{o,i+1}}{2} \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

vagyis a népmozgalmi események egyes kohorszokra jellemző élettartam alatti össznagyságai a két szomszédos kohorszban észlelhető össznagyságaik összegének a felével egyenlők. Megállapítható továbbá, hogy

$$s_{o,0} + s_{o,i} = s_{o,1} + s_{o,i-1} = s_{o,2} + s_{o,i-2} = \dots$$

és

$$\frac{s_{o,0} + s_{o,i} + s_{o,2} + \dots + s_{o,i-1} + s_{o,i}}{i} = \frac{s_{o,0} + s_{o,i}}{2}.$$

A népmozgalmi jelenségek élettartam alatti össznagyságainak az összege az első i kohorszban tehát az

$$\frac{i (s_{o,0} + s_{o,i})}{2}$$

formulával, az i -odik kohorszra jellemző nagyságuk pedig a

$$s_{o,i} = s_{o,0} + i k s_{o,0}$$

formulából adódóan a

$$s_{o,i} = s_{o,0} (1 + k i)$$

formulával határozható meg.

E feltételek mellett a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak a transzverzális összege:

$$\begin{aligned}
 s &= \sum \gamma_i s_{o,i} = \sum \gamma_i s_{o,0} (1 + k i) = s_{o,0} \sum \gamma_i (1 + k i) = \\
 &= s_{o,0} \sum (\gamma_i + \gamma_i k i) = s_{o,0} \sum \gamma_i + s_{o,0} k \sum i \gamma_i = \\
 &= s_{o,0} + s_{o,0} k \sum i \gamma_i = s_{o,0} + s_{o,0} k.
 \end{aligned}$$

ahol m a naptár által felölelt éveknek az átlagát jelzi. Így

$$s = s_{o,o} (1 + k m) = s_{o,m},$$

vagyis a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak transzverzális összege az m évvel a megfigyelés éve előtti évben született kohorszban észlelhető longitudinális összegével lesz egyenlő. Amennyiben csak a naptár változatlan-sága felől vagyunk bizonyosak, csupán az

$$s = \sum_i \gamma_i s_{o,i}$$

formulát használjuk annak a jelzésére, hogy a második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámok transzverzális összege az egyes tényleges kohorszokban észlelhető longitudinális összegek súlyozott számtani átlagaként értelmezendő, ami magában foglalja annak a feltételezését is, hogy S a $s_{o,i}$ - k extrém értékei között helyezkedik el.

c) Tételezzük fel ezután, hogy a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak a longitudinális összegei változatlanok és ezen összegek kormegoszlása (naptára) változik lineárisan: a naptár x -éves korra vonatkozó $\gamma_{x,i}$ eleme a kohorsz i indexének a lineáris függvénye, vagyis

$$\gamma_{x,i} = a_x + b_x i.$$

Ebben az esetben

$$S = s_o \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} i b_i \right).$$

Mínthogy a naptár elemeinek összege a tényleges kohorszokban mindig egyenlő eggyel, vagyis

$$\sum_{x=0} \gamma_{x,i} = 1,$$

bármely i mellett fennáll, hogy

$$\sum_{x=0}^{\infty} a_x + i \sum_{x=0}^{\infty} b_x = 1,$$

ami akkor lehetséges, ha

$$\sum_{x=0}^{\infty} a_x = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{x=0}^{\infty} b_x = 0,$$

s így

$$S = s_o \left(1 + \sum_{i=0}^{\infty} i b_i \right) .$$

Fejezzük ki explicitebb módon a zárójelben szereplő részt a naptár által felölelt évek átlagos nagyságának a bevezetésével az $(i-1)$ kohorszban és az i kohorszban. Az i kohorszban ez az átlagos nagyság

$$\sum_{x=0}^{\infty} x \gamma_{x,i} = \sum_{x=0}^{\infty} x a_x + i \sum_{x=0}^{\infty} x b_x ,$$

az $(i-1)$ kohorszokban pedig

$$\sum_{x=0}^{\infty} x \gamma_{x,x-1} = \sum_{x=0}^{\infty} x a_x + (i-1) \sum_{x=0}^{\infty} x b_x .$$

Igy a naptár átlagértékének Δm -mel jelzett változása az i kohorsz és a következő $(i-1)$ kohorsz között

$$\Delta m = - \sum_{x=0}^{\infty} x b_x ,$$

egy olyan mennyiség, mely független a figyelembe vett egymást követő kohorszoktól, s ez a mennyiség szerepel az S előző formulájában is, mely tehát a következőképpen is írható

$$S = s_o (1 - \Delta m) ,$$

vagyis a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak a transzverzális összege ebben az esetben egyenlő minden tényleges kohorszban azonos nagyságú longitudinális összegüknek és az $1 - \Delta m$ tényezőnek a szorzatával, mely utóbbi a naptár módosulását fejezi ki. Könnyen belátható, hogy

- ha a naptár által felölelt idő csökken, akkor $\Delta m < 0$ és $1 - \Delta m > 1$, s így $S > s_o$.

- ha a naptár által felölelt idő nő, akkor $\Delta m > 0$ és $1 - \Delta m < 1$, s így $S < s_o$.

d) Képzeljük el végül, hogy a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak longitudinális összegei is és ezen összegek kormegoszlása, naptára is az előbbi értelemben lineárisan változik. Ebben az esetben

$$S = s_{o,o} \left[1 - m + k (m_o - \Delta m^{(2)}) \right] ,$$

ahol k , mint jeleztük a $s_{o,i}$ mennyiségek lineáris változásának a koefficiense, m pedig a naptár másodrendű momentuma (Δ jelzi e momentum változását).

A fenti négy helyzet áttekintéséből is kitűnik, hogy míg a népmozgalmi események longitudinális kormegoszlása ill. naptára elemeinek az összege az egyes tényleges kohorszokban mindig egyenlő eggyel ez az összeg fiktív kohorszokban, melyekben a népmozgalmi események korszpecifikus intenzitásainak, ill. nagyságainak az összegét is mérjük eltérhet az egységtől, ez utóbbinál kisebb, illetve nagyobb is lehet. Roland Pressat például az 1870-1871 és 1915-1916 között született svédországi női kohorszok átlagos korszpecifikus termékenységi arányszámait transzverzális összegeinek az elemzése kapcsán azt találta, hogy a naptár elemeinek transzverzális összegei 0,87 és 1,31 között ingadoznak. A naptár elemeinek transzverzális összegét T -vel jelölve a korszpecifikus termékenységi arányszámok transzverzális összegeinek S -sel jelzett nagyságain kívül megadja ez utóbbiak T -vel korrigált értékeit, vagyis az S/T nagyságokat is. Az S és az S/T nagyságainak grafikusan is ábrázolt eltérései szemléletesen mutatják, hogy az általános korszpecifikus termékenységi arányszámok transzverzális összegeinek időbeli alakulását, különösen rövidebb távon, jóval nagyobb mértékben befolyásolja a születések naptárának, mint a leszármazottak végső számának, vagyis az általános korszpecifikus termékenységi arányszámok longitudinális összegeinek a változása. Értékesebb, a konjunkturális ingadozások hatását magán nem viselő mutatókhoz jutunk tehát az S/T értékeinek kiszámítása után. Pressat ezen gondolatmenetnek analógiájára egyéb népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámait transzverzális összegeit is - legalábbis elvileg - korrigálhatónak és az esetek zömében korrigálandónak tartjuk a "naptárunk" transzverzális összegeivel történő elosztásuk után.* Ez a korrigálandóság tulajdonképpen csak akkor felesleges, ha a vonatkozó események naptára a transzverzális mérés által érintett összes tényleges kohorszokban ugyanaz. Felesleges természetesen az olyan stacionér, valamint stabil növekvő és stabil csökkenő népességben is, melyekben a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámait változatlanok.

E korrekció természetesen csak a népmozgalmi jelenségek longitudinális vizsgálata alapján lenne megváltoztatható, melynek előfeltételei az esetek zömében még csak igen hiányosan vannak meg. E korrekció által ugyanakkor a népesedési helyzet elemzésének olyan transzverzális mutatóihoz jutnánk, melyek valóban jóval értékesebbek lennének minden eddigi mutatónál.

Értekezésünk harmadik fejezetének eme 5. pontjában a népmozgalmi jelenségek transzverzális és longitudinális elemzése közötti kapcsolatok néhány elvi-módszertani jellegű vonatkozásának a megvilágítását tűztük ki célul. Ezt a célunkat csak részben valósítottuk meg. Nagyobb elterjedtségük miatt főként a transzverzális elemzés során használt főbb mutatókat vizsgáltuk meg abból a szempontból, hogy miként függ értékeinek az alakulása a vonatkozó népmozgalmi jelenségek egyes kohorszokban megfigyelhető manifesztálódásaitól. Elvi-módszertani szempontból ugyanilyen fontos lenne természetesen e célkitűzésnek a megfordítása is. Mindkét célkitűzés elmélyültebb, részletesebb megvalósítása és a számos mate-

*Ez a módszer természetesen csak abban az esetben alkalmazható, ha a népmozgalmi események második kategóriába tartozó korszpecifikus arányszámainak longitudinális összege minden érintett kohorszban azonos, mint az Hablicsek László intézeti kollégám kimutatta.

matikailag is definiálható kapcsolatnak a megfelelő adatok felhasználásán alapuló illusztrálása, vagyis a feltárt összefüggések konkrét alkalmazása e kérdéskör további tanulmányozását igényli.

Nem tértünk ki fejtegetéseink során több külföldi szerző (pl. N. B. Ryder) (76) a transzverzális és longitudinális elemzés közötti kapcsolatokra vonatkozó fejtegetéseinek a bemutatására[§], és e kapcsolatokat csupán a népmozgalmi jelenségek és nem a népesség által produkált egyéb (pl. gazdasági) jelenségek transzverzális és longitudinális elemzése közötti kapcsolatok vizsgálata során született - az előadottakkal egyébként analóg jellegű -, megállapításoknak (11) az ismeretére sem. A szóban forgó kapcsolatok jelentősége egyre növekvő felismerésének láttán joggal bizhatunk részint abban, hogy a demográfiai elemzés tudományának a továbbfejlődése ezen a téren már a közeli jövőben is figyelemre méltó lesz, részint pedig abban, hogy a népmozgalmi jelenségek, illetve események alapulvételével előadottak a szóban forgó mutató kapcsán - mutatis mutandis - a különféle szubpopulációk, valamint a gazdasági jelenségek és események transzverzális és longitudinális elemzésének a kapcsolatára is viszonylag könnyen kiterjeszthetők.

Ez utóbbi megértése megkönnyítésének céljából felidézzük, hogy a gazdasági események valamely időszak (pl. egy év) alatti abszolút nagysága, ezen események transzverzálisan megfigyelhető korszpecifikus intenzitásaitól, illetve nagyságaitól is függ. A gazdasági események transzverzálisan megfigyelhető korszpecifikus intenzitásai, illetve nagyságai pedig - a megfelelő adatok rendelkezésre állása esetén -, a vonatkozó időszak közepén különböző életkoruaknak a születési évjáratok által leélt összes éveknek a számára és életkor szerinti megoszlására (naptárára) és az ezen évjáratok által produkált gazdasági eseményeknek az összmenyiségére és életkor szerinti megoszlására (naptárára) is visszavezethetők, a gazdasági események valamely időszak (pl. naptári év) alatti abszolút nagysága pedig kizárólag ez utóbbiak birtokában is előállítható. Lehetségessé válik tehát, hogy a gazdasági események un. korfáit kohorsz-módszerű (longitudinális) elemzés tárgyává tegyük. Amennyiben például az időszak közepén $P_{i,i}$ számú i -éveseknek a születési évjáratok valamely gazdasági eseményből összesen $G_{o,i}$ mennyiséget produkál, s i éves korában ennek $\beta_{o,i}$ hányadát valósítja meg, úgy a vonatkozó gazdasági események az időszak alatt az i -évesek által produkált összmenyisége megközelítőleg $G_{o,i} \cdot \beta_{o,i}$, egy i -évesre jutó mennyisége pedig $G_{o,i} \beta_{o,i} P_{i,i}$ lesz. A gazdasági esemény adott időszak alatti összmenyisége ($P_{\text{gazd.}}$) tehát:

$$\begin{aligned} P_{\text{gazd.}} &= G_{o,0} \beta_{o,0} + G_{o,1} \beta_{1,1} + G_{o,2} \beta_{2,2} + \dots + G_{o,i} \beta_{i,i} + \dots = \\ &= P_{o,0} \frac{G_{o,0} \beta_{o,0}}{T_{o,0} \alpha_{o,0}} + P_{1,1} \frac{G_{o,1} \beta_{1,1}}{T_{o,1} \alpha_{1,1}} + P_{2,2} \frac{G_{o,2} \beta_{2,2}}{T_{o,2} \alpha_{2,2}} + \dots + \\ &\quad + \dots + P_{i,i} \frac{G_{o,i} \beta_{i,i}}{T_{o,i} \alpha_{i,i}} + \dots \end{aligned}$$

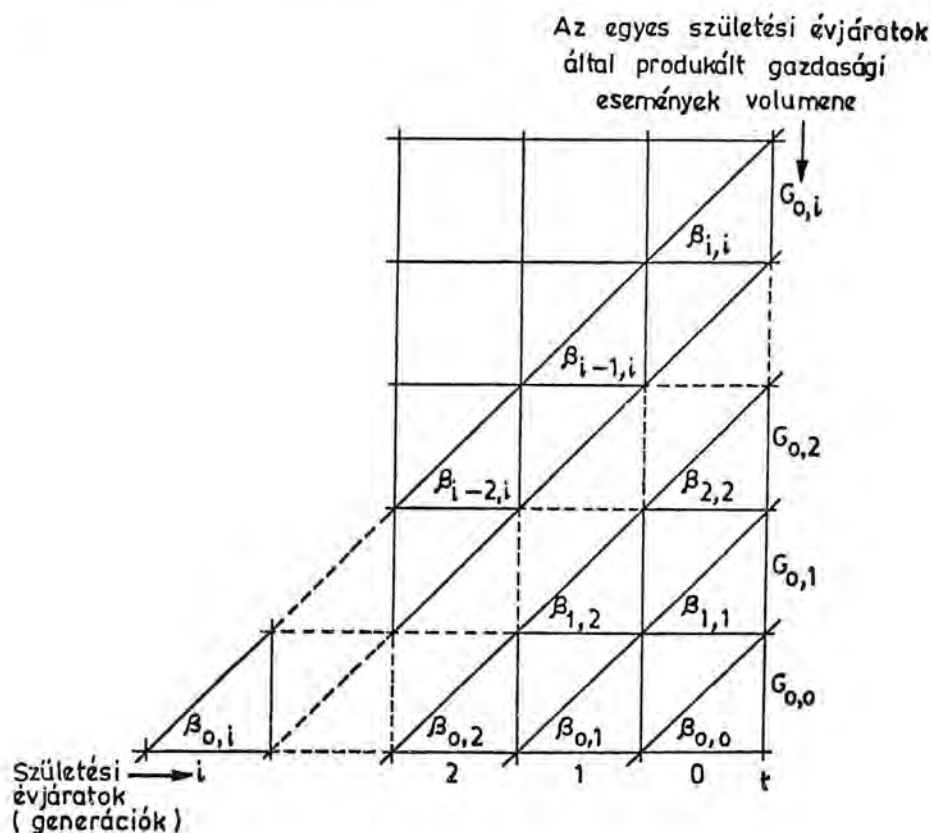
[§] Norman B. Rydernek, a szóban forgó fejtegetéseket tartalmazó tanulmányát Dr. Miltényi Károly ismertette a "Demográfia" 1965. évi 1. számában.

amiből az egy lakosra jutó mennyiség:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\text{gazd.}}}{P} &= \frac{G_{0,0} \beta_{0,0}}{P} + \frac{G_{0,1} \beta_{1,1}}{P} + \frac{G_{0,2} \beta_{2,2}}{P} + \dots + \frac{G_{0,i} \beta_{i,i}}{P} + \dots = \\ &= \frac{P_{0,0}}{P} \frac{G_{0,0} \beta_{0,0}}{T_{0,0} \alpha_{0,0}} + \frac{P_{1,1}}{P} \frac{G_{0,1} \beta_{1,1}}{T_{0,1} \alpha_{1,1}} + \frac{P_{2,2}}{P} \frac{G_{0,2} \beta_{2,2}}{T_{0,2} \alpha_{2,2}} + \dots + \\ &\quad + \dots + \frac{P_{i,i}}{P} \frac{G_{0,i} \beta_{i,i}}{T_{0,i} \alpha_{i,i}} + \dots, \end{aligned}$$

ahol $G_{0,0}, G_{0,1}, G_{0,2}, \dots, G_{0,i}, \dots$ a vonatkozó gazdasági jelenség az időszak közepén 0-évesek ($P_{0,0}$), egy évesek ($P_{1,1}$), két évesek ($P_{2,2}$), i -évesek ($P_{i,i}$) születési évjáratok által produkált összmenyiségeit szimbolizálja, $\beta_{0,0}, \beta_{1,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{i,i}, \dots$ pedig ezen összmenyiségeknek az egyes életkorban realizált hányadait mutatja (III. 18. ábra).

III. 18. A GAZDASÁGI ESEMÉNYEK VOLUMENE ÉS NAPTÁRA A KÜLÖNBÖZŐ SZÜLETÉSI KOHORSZOKBAN (GENERÁCIÓKBAN)



Az értekezésünk e fejezetének első pontjában kifejtettekből többek közt kitűnt, hogy $P_{0,0} = T_{0,0} \alpha_{0,0}$, $P_{1,1} = T_{0,1} \alpha_{1,1}$, $P_{2,2} = T_{0,2} \alpha_{2,2}$, $\dots$, $T_{i,i} \alpha_{i,i} \dots$, hogy

$$P = \sum_{i=0}^{\omega} P_i = \sum_{i=0}^{\omega} T_{0,i} \propto_i \text{ stb.}$$

Módunk nyílik azonban arra is, hogy a gazdasági események korszpecifikus intenzitásait, ill. nagyságait a vonatkozó időszak közepén különböző életkoruaknak a születési évjáratát reprezentáló átlagemberek élettartamai alatti gazdasági teljesítményekre és a teljesítmények életkor szerinti megoszlásaira (naptárait) vezessük vissza. Amennyiben pl. az időszak közepén i -évesek születési évjáratának egy átlagos reprezentánsa valamely gazdasági eseményből élete folyamán, a halandóság hatásának a figyelembevétele nélkül számítva $\text{gazd.}_{0,i}$ mennyiséget produkál, s i -éves korában ennek $\gamma_{i,i}$ hányadát valósítja meg, úgy a vonatkozó gazdasági eseményeknek az időszak alatt az i -évesekre jellemző intenzitása, ill. nagysága megközelítőleg $\text{gazd.}_{0,i} \gamma_{i,i}$ lesz. A gazdasági esemény adott időszak alatti össz mennyisége ($P_{\text{gazd.}}$ tehát:

$$P_{\text{gazd.}} = P_{0,0} \cdot \text{gazd.}_{0,0} \cdot \gamma_{0,0} + P_{1,1} \cdot \text{gazd.}_{0,1} \cdot \gamma_{1,1} + \\ + P_{2,2} \cdot \text{gazd.}_{0,2} \cdot \gamma_{2,2} + \dots + P_{i,i} \cdot \text{gazd.}_{0,i} \gamma_{i,i} + \dots,$$

amiből az egy lakosra jutó mennyiség:

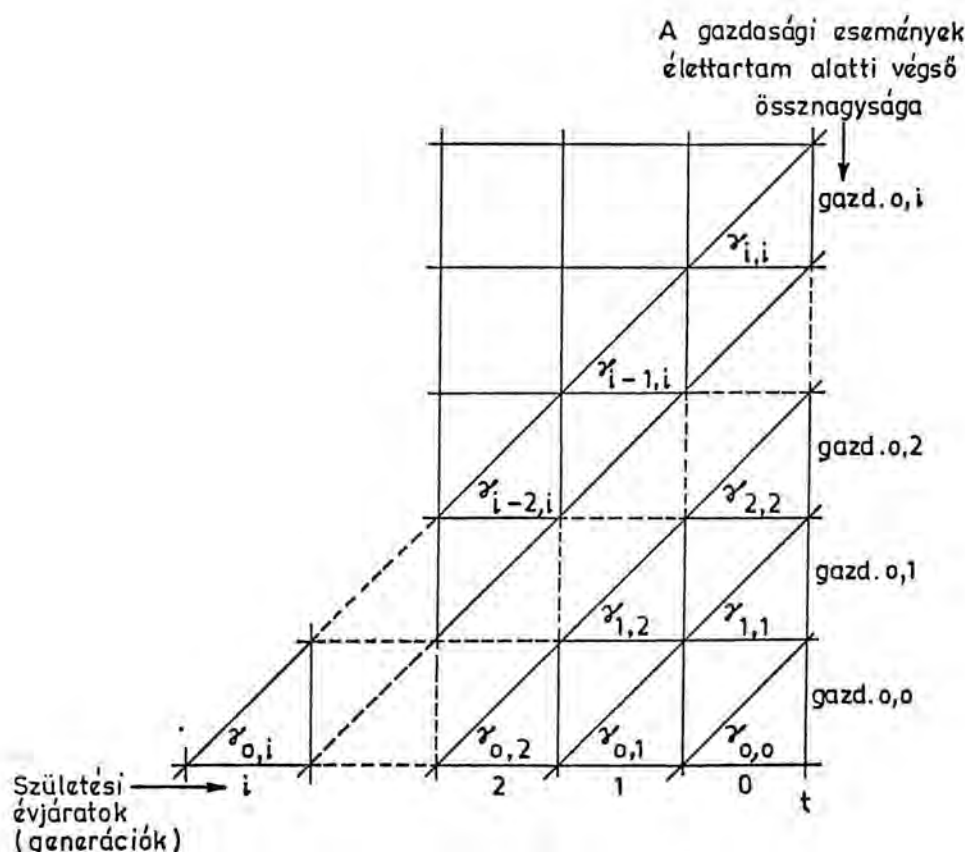
$$\frac{P_{\text{gazd.}}}{P} = \frac{P_{0,0}}{P} \text{gazd.}_{0,0} \gamma_{0,0} + \frac{P_{1,1}}{P} \text{gazd.}_{0,1} \cdot \gamma_{1,1} + \\ = \frac{P_{2,2}}{P} \text{gazd.}_{0,2} \cdot \gamma_{2,2} + \dots + \frac{P_{i,i}}{P} \text{gazd.}_{0,i} \cdot \gamma_{i,i} + \dots,$$

ahol $\text{gazd.}_{0,0}$, $\text{gazd.}_{0,1}$, $\text{gazd.}_{0,2}, \dots$, $\text{gazd.}_{0,i} \dots$ a vonatkozó gazdasági esemény az időszak közepén 0-évesek ($P_{0,0}$), egy évesek ($P_{1,1}$), két évesek ($P_{2,2}$), i -évesek ($P_{i,i}$) születési évjáratát reprezentáló átlagember által produkált élettartam alatti végső össz nagyságait mutatja; $\gamma_{0,0}$, $\gamma_{1,1}$, $\gamma_{2,2}$, $\dots$, $\gamma_{i,i} \dots$ pedig ezen össznagyságoknak a szóban forgó átlagemberek élettartama alatt az egyes életkorokban realizált hányadait szimbolizálja. (III. 19. ábra)

Az értekezésünk e fejezetének eme 5. pontjában kifejtettekből világosan kitűnik, hogy a különféle ismérvek alapján definiálható szubpopulációk és a népesség által produkált különféle gazdasági események stacionérrá válásának az össznépesség stacionér jellegén túlmenően az a feltétele, pontosabban az is feltétele, hogy a vonatkozó népmozgalmi, illetve gazdasági eseményeknek a népességet alkotó férfi és női születési évjáratok egy-egy reprezentánsára jutó élettartam alatti végső össznagyságai és naptárai minden egyes férfi, illetve női születési évjárat (generáció) esetében azonosak legyenek. Ebben és csak ebben az esetben egyenlő a vonatkozó népmozgalmi, illetve gazdasági események második kategóriájába tartozó korszpecifikus arányszámainak a transzverzális összege és naptára a minden

tényleges születési kohorszban (generációban) megfigyelhető longitudinális összegükkel és naptárunkkal. E feltétel teljesülésének természetesen szintén vannak matematikailag is definiálható további feltételei; ezek elemzésére azonban értekezésünkben nem térünk ki.

III. 19. A GAZDASÁGI ESEMÉNYEK ÉLETTARTAM ALATTI VÉGSŐ ÖSSZMAGYSÁGA ÉS NAPTÁRA A KÜLÖNBÖZŐ SZÜLETÉSI KOHORSZOKBAN (GENERÁCIÓKBAN)



6. A stacionér népesség által már leélt és az általa még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó tétel alkalmazásának lehetőségei a stacionér populációk és szubpopulációk demográfiai jellemzői, valamint demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatok körének kibővítésére

Olyan stacionér népességben, melyben a valamely szubpopulációhoz (pl. a nőtlenek, ill. hajadonok, a házások, az özvegyek, az elváltak, az iskolalátogatók, a gazdaságilag aktívak, a gazdaságilag inaktívak stb. szubpopulációjához) a különböző koruaknak időben változatlan, állandó hányada (%-a) tartozik, a vonatkozó szubpopulációhoz tartozás állapotában

évenként leélt összes éveknek a száma ($\sum_{x=0}^{x=\omega} L_{\text{spec., } x} = T_{\text{spec., } 0}$) egyenlő a bármely

születési évjárat ujszülöttei (l_0) által ezen állapotban leélendő, illetve meghaltjai

($\sum_{x=0}^{x=\omega} d_x = l_0$) által ezen állapotban leélt összes éveknek a számával
 $(l_0 \cdot e_{\text{spec., } 0}^0 = e_{\text{spec., } 0}^0 \sum_{x=0}^{x=\omega} d_x = T_{\text{spec., } 0})$, s egyben a vonatkozó szubpopuláció tetszőleges időpontban megfigyelhető összlétszámával is.

Bebizonyítható az is, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér szubpopuláció által már leélt összes éveknek a száma egyenlő a népesség által a vonatkozó szubpopulációhoz tartozás állapotában még leélendő összes éveknek a számával (a vonatkozó ún. specifikus életpotenciállal):

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec., } x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x$$

E formulákban x szintén a betöltött évek számát jelöli; az $e_{\text{spec., } x}^{o'}$ mutató esetében a betöltött évek száma alapján x évesek (L_x) által várható átlagos specifikus élettartamról van szó, míg tehát $e_{\text{spec., } x}^0 = T_{\text{spec., } x} / L_x$, megállapodhatunk abban, hogy

$$e_{\text{spec., } x}^{o'} = \frac{\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2}}{L_x},$$

vagyis $e_{\text{spec., } x}^{o'} \neq e_{\text{spec., } x}^0$, minthogy azonban $e_{\text{spec., } 0}^{o'}$ kiszámítására szolgáló formulában legtöbbször a számláló és a nevező értéke is kisebb, mint az $e_{\text{spec., } x}^0$ kiszámítására szolgáló formulában, megállapíthatjuk, hogy $e_{\text{spec., } x}^{o'} \approx e_{\text{spec., } x}^0$.

$$A \sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec., } x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x \text{ egyenlőség fennforgása többek közt annak alapján látható be, hogy:}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec., } x} &= 0,5 L_{\text{spec., } 0} + 1,5 L_{\text{spec., } 1} + 2,5 L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\ &= 0,5 L_{\text{spec., } 0} \\ &\quad + 0,5 L_{\text{spec., } 1} + L_{\text{spec., } 1} \\ &\quad + 0,5 L_{\text{spec., } 2} + L_{\text{spec., } 2} + L_{\text{spec., } 2} \\ &\quad \dots \\ \text{Ez oszloponként összeadva} &= 0,5 T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2} + \dots = \\ &= \frac{T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1}}{2} + \frac{T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2}}{2} + \frac{T_{\text{spec., } 2} + T_{\text{spec., } 3}}{2} + \dots = \end{aligned}$$

$$= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.},x} + T_{\text{spec.},x+1}}{2} \right)$$

és

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.},x}^{o'} L_x &= e_{\text{spec.},0}^{o'} L_0 + e_{\text{spec.},1}^{o'} L_1 + e_{\text{spec.},2}^{o'} L_2 + \dots = \\ &= \frac{\frac{T_{\text{spec.},0} + T_{\text{spec.},1}}{2}}{L_0} L_0 + \frac{\frac{T_{\text{spec.},1} + T_{\text{spec.},2}}{2}}{L_1} L_1 + \\ &+ \frac{\frac{T_{\text{spec.},2} + T_{\text{spec.},3}}{2}}{L_2} L_2 + \dots = \\ &= \frac{T_{\text{spec.},0} + T_{\text{spec.},1}}{2} + \frac{T_{\text{spec.},1} + T_{\text{spec.},2}}{2} + \\ &+ \frac{T_{\text{spec.},2} + T_{\text{spec.},3}}{2} + \dots = \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.},x} + T_{\text{spec.},x+1}}{2} \right),$$

vagyis

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec.},x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.},x}^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.},x} + T_{\text{spec.},x+1}}{2} \right),$$

A fentiek alapján megállapítható, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér szubpopulációnak az átlagos életkora ($\bar{a}_{\text{spec.}}$) egyenlő a vonatkozó specifikus állapotban leélendő évek számának a megfigyelt szubpopuláció egy reprezentánsára jutó hányadával:

$$\bar{a}_{\text{spec.}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec.},x}}{T_{\text{spec.},0}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.},x}^{o'} L_x}{T_{\text{spec.},0}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.},x} + T_{\text{spec.},x+1}}{2} \right)}{T_{\text{spec.},0}}.$$

Előfordulhat, hogy a stacionér szubpopuláció átlagos életkora nagyobb a vonatkozó specifikus állapotban leélendő évek 0 éves korban várható átlagos számánál, vagyis hogy

$$\bar{a}_{\text{spec.}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, 0}} > e_{\text{spec.}, 0}^{\text{o'}}.$$

Jelöljük valamely stacionér népességben valamely stacionér szubpopuláció változatlan életkoronkénti arányait $\text{spec.}, x$ -szel, vagyis alkalmazzuk a

$$\frac{L_{\text{spec.}, 0}}{L_0} = \text{spec.}, 0$$

$$\frac{L_{\text{spec.}, 1}}{L_1} = \text{spec.}, 1$$

$$\frac{L_{\text{spec.}, 2}}{L_2} = \text{spec.}, 2$$

·
·
·
stb.,

jelöléseket, általában az $L_{\text{spec.}, x} / L_x = \text{spec.}, x$ jelölést; legyen továbbá ezen arányok a betöltött évek száma alapján x éves korig kumulált nagyságának a szimbóluma spec._x .

Matematikailag is megfogalmazva:

$$\text{spec.}_0 = 0,5 \text{ spec.}, 0 = 0,5 \frac{L_{\text{spec.}, 0}}{L_0}$$

$$\text{spec.}_1 = \text{spec.}, 0 + 0,5 \text{ spec.}, 1 = \frac{L_{\text{spec.}, 0}}{L_0} + 0,5 \frac{L_{\text{spec.}, 1}}{L_1}$$

$$\text{spec.}_2 = \text{spec.}, 0 + \text{spec.}, 1 + 0,5 \text{ spec.}, 2 =$$

$$= \frac{L_{\text{spec.}, 0}}{L_0} + \frac{L_{\text{spec.}, 1}}{L_1} + 0,5 \frac{L_{\text{spec.}, 2}}{L_2}$$

stb.

Könnyen belátható, hogy a betöltött éveik száma alapján x évesek a vonatkozó szubpopulációhoz tartozás állapotában a megfigyelés időpontjáig $\text{spec.}_x \cdot L_x$ számú évet töltöttek el s hogy

$$\text{spec.}_0 L_0 = 0,5 \text{ spec.}, 0 L_0 = \text{spec.}, 0 \frac{L_0}{2}$$

$$\text{spec.}_1 L_1 = \text{spec.}, 0 L_1 + 0,5 \text{ spec.}, 1 L_1 = \text{spec.}, 0 L_1 + \text{spec.}, 1 \frac{L_1}{2}$$

$$\text{spec.}_2 L_2 = \text{spec.}, 0 L_2 + \text{spec.}, 1 L_2 + 0,5 \text{ spec.}, 2 L_2 =$$

$$= \text{spec.}, 0 L_2 + \text{spec.}, 1 L_2 + \text{spec.}, 2 \frac{L_2}{2}$$

stb.

A fentiek figyelembevételével megállapíthatjuk, hogy

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec., } x},$$

vagyis, hogy valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népesség már annyi évet töltött a valamely specifikus szubpopulációhoz tartozásnak az állapotában, ahány évet a vonatkozó szubpopuláció a megfigyelés időpontjától számítva még összesen le fog élni. Ennek az egyenlőségnek a fennforgása annak alapján látható be, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x &= \text{spec}_0 L_0 + \text{spec}_1 L_1 + \text{spec}_2 L_2 + \dots + \\ &= \text{spec., } 0 \frac{L_0}{2} \\ &+ \text{spec., } 0 L_1 + \text{spec., } 1 \frac{L_1}{2} \\ &+ \text{spec., } 0 L_2 + \text{spec., } 1 L_2 + \text{spec., } 2 \frac{L_2}{2} \end{aligned}$$

Ez oszloponként összeadva = $\text{spec., } 0 \frac{T_0 + T_1}{2} + \text{spec., } 1 \frac{T_1 + T_2}{2} + \text{spec., } 2 \frac{T_2 + T_3}{2} + \dots =$

$$= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec., } x \right)$$

és

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec., } x} &= e_0^{o'} L_{\text{spec., } 0} + e_1^{o'} L_{\text{spec., } 1} + e_2^{o'} L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2} \frac{1}{L_0} L_{\text{spec., } 0} + \frac{T_1 + T_2}{2} \frac{1}{L_1} L_{\text{spec., } 1} + \frac{T_2 + T_3}{2} \frac{1}{L_2} L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2} \text{spec., } 0 + \frac{T_1 + T_2}{2} \text{spec., } 1 + \frac{T_2 + T_3}{2} \text{spec., } 2 + \dots = \\ &= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec., } x, \end{aligned}$$

vagyis

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec., } x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec., } x.$$

A fentiek alapján megállapítható, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér népességben a valamely specifikus szubpopulációhoz tartozás állapotában leélt évek számának az egy lakosra jutó hányada ($\bar{p}$) egyenlő a valamely szintén tetszőleges időpontban megfigyelt specifikus szubpopuláció által a megfigyelés időpontjától számítva még összesen leélendő évek számának egy lakosra jutó hányadával:

$$\bar{p} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec},,x}}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec},,x}{T_o}.$$

Megállapíthatjuk továbbá, hogy:

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec},,x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec},,x}^{o'} L_{\text{spec},,x},$$

Ugyanis

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec},,x} &= \text{spec},,0 L_{\text{spec},,0} + \text{spec},,1 L_{\text{spec},,1} + \\ &+ \text{spec},,2 L_{\text{spec},,2} + \dots = \text{spec},,0 \frac{L_{\text{spec},,0}}{2} + \\ &+ \text{spec},,0 L_{\text{spec},,1} + \text{spec},,1 \frac{L_{\text{spec},,1}}{2} + \\ &+ \text{spec},,0 L_{\text{spec},,2} + \text{spec},,1 L_{\text{spec},,2} + \\ &+ \text{spec},,2 \frac{L_{\text{spec},,2}}{2} + \dots \end{aligned}$$

Ez oszloponként
összeadva

$$\begin{aligned} &= \text{spec},,0 \frac{T_{\text{spec},,0} + T_{\text{spec},,1}}{2} + \text{spec},,1 \frac{T_{\text{spec},,1} + T_{\text{spec},,2}}{2} + \\ &+ \text{spec},,2 \frac{T_{\text{spec},,2} + T_{\text{spec},,3}}{2} + \dots = \\ &= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec},,x} + T_{\text{spec},,x+1}}{2} \right) \text{spec},,x \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec},,x}^{o'} L_{\text{spec},,x} &= e_{\text{spec},,0}^{o'} L_{\text{spec},,0} + e_{\text{spec},,1}^{o'} L_{\text{spec},,1} + \\ &+ e_{\text{spec},,2}^{o'} L_{\text{spec},,2} + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1}}{2}}{L_0} L_{\text{spec., } 0} + \\
&+ \frac{\frac{T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2}}{2}}{L_1} L_{\text{spec., } 1} + \\
&+ \frac{\frac{T_{\text{spec., } 2} + T_{\text{spec., } 3}}{2}}{L_2} L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\
&= \frac{T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1}}{2} \text{spec., } 0 + \frac{T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2}}{2} \text{spec., } 1 + \\
&+ \frac{T_{\text{spec., } 2} + T_{\text{spec., } 3}}{2} \text{spec., } 2 + \dots = \\
&= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right) \text{spec., } x ;
\end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x} &= \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x} = \\
&= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right) \text{spec., } x ,
\end{aligned}$$

tehát a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér szubpopuláció által az adott szubpopulációhoz tartozás állapotában már leélt éveknek a száma egyenlő az általa az ugyan-ezen szubpopulációhoz tartozás állapotában még leélendő éveknek a számával.

Ebből az egyenlőségből adódik, hogy:

$$\begin{aligned}
2 \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x} &= 2 \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x} = \\
&= \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x} + \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x} = \\
&= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left[L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'}) \right] , \text{ illetve, hogy:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{x=0}^{x=\omega} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right] = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec}_x}^{o'} L_{\text{spec.}, x} = \\ & = \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x} . \end{aligned}$$

Könnyen belátható továbbá, hogy:

$$\bar{a}_{\text{spec}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} ,$$

vagyis, hogy a megfigyelt szubpopuláció által az adott szubpopulációhoz tartozás állapotában már leélt éveknek az átlagos száma ($\bar{a}_{\text{spec}}$) egyenlő az ezen állapotban még leélendő évek számának a vonatkozó szubpopuláció egy átlagos reprezentánsára jutó számával, s hogy:

$$\begin{aligned} 2 \bar{a}_{\text{spec}} &= \frac{2 \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x} + \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}} , \end{aligned}$$

vagyis, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stacionér szubpopuláció által az adott szubpopulációhoz tartozás állapotában már leélt évek átlagos számának a kétszerese egyenlő e szubpopuláció különböző koru reprezentánsai által az adott állapotban még leélendő évek átlagos számának a kétszeresével, vagyis az adott szubpopulációhoz tartozás állapotában már leélt és még leélendő évek számának a súlyozott számtani átlagával, illetve, hogy:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{\text{spec}} &= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{x=\omega} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} , \end{aligned}$$

vagyis, hogy a szubpopuláció különböző koru reprezentánsai által az adott állapotban már leélt és még leérendő évek száma súlyozott számtani átlagának a fele ($\bar{a}_{\text{spec}}$) egyenlő az általa az adott szubpopulációhoz tartozás állapotában a megfigyelés időpontjáig már leélt, illetve a megfigyelés időpontjától még leérendő éveknek az átlagos számával.

Általában azt tapasztaljuk, hogy:

$$2 \bar{a}_{\text{spec}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}} > e_{\text{spec.}, o}^{o'},$$

minthogy $(\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) > e_{\text{spec.}, o}^{o'}$

mindazokban az életkorokban, melyekben $\text{spec}_x \neq 0$.

Jelöljük meg $\text{spec.}, x$ -szel valamely x éves koru szubpopuláció által az x éves korban leélt évek számát:

$$\text{spec.}, x = \frac{L_{\text{spec.}, x}}{L_{\text{spec.}, x}} = 1,$$

vagyis a $\text{spec.}, x$ mutató értéke minden esetben egyenlő eggyel. Legyen továbbá a az az életkor, melyben a vonatkozó szubpopuláció először és b , melyben utoljára előfordul. Ennek alapján $\text{spec}_x = \text{spec.}, a + \dots + \text{spec.}, x-2 + \text{spec.}, x-1 + 0,5 \text{ spec.}, x =$
 $= 1 + \dots + 1 + 1 + 0,5$

és

$$\text{spec}_a = \text{spec}_o = 0,5.$$

Bebizonyítható, hogy:

$$\sum_{x=a}^{x=b} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x} = \sum_{x=a}^{x=b} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}.$$

Ebben az egyenlőségben

$$e_{\text{spec.}, x}^{o'} = \frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2 L_{\text{spec.}, x}}.$$

Minthogy az $e_{\text{spec.}, x}^{o'}$ mutató értékeit csak az a és b határok közötti életkorokra vonatkozóan számíthatjuk ki:

$$e_{\text{spec.}, o}^{o'} = e_{\text{spec.}, a}^{o'}.$$

A fenti egyenlőség annak alapján látható be, hogy:

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{L_{\text{spec., } x}} L_{\text{spec., } x} &= \frac{\text{spec}_0}{L_{\text{spec., } 0}} L_{\text{spec., } 0} + \frac{\text{spec}_1}{L_{\text{spec., } 1}} L_{\text{spec., } 1} + \\
 &\quad + \frac{\text{spec}_2}{L_{\text{spec., } 2}} L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\
 &= 0,5 L_{\text{spec., } 0} + 1,5 L_{\text{spec., } 1} + 2,5 L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\
 &= 0,5 L_{\text{spec., } 0} + \\
 &\quad + 0,5 L_{\text{spec., } 1} + L_{\text{spec., } 1} + \\
 &\quad + 0,5 L_{\text{spec., } 2} + L_{\text{spec., } 2} + L_{\text{spec., } 2} + \\
 &\quad \dots
 \end{aligned}$$

Ez oszloponként
összeadva

$$\begin{aligned}
 &= 0,5 T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2} + \dots = \\
 &= \frac{T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1}}{2} + \frac{T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2}}{2} + \frac{T_{\text{spec., } 2} + T_{\text{spec., } 3}}{2} + \dots = \\
 &= \sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right) \text{ és}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=a}^{x=b} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x} &= e_{\text{spec., } 0}^{o'} L_{\text{spec., } 0} + e_{\text{spec., } 1}^{o'} L_{\text{spec., } 1} + \\
 &\quad + e_{\text{spec., } 2}^{o'} L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\
 &= \frac{\frac{T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1}}{2}}{L_{\text{spec., } 0}} L_{\text{spec., } 0} + \frac{\frac{T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2}}{2}}{L_{\text{spec., } 1}} L_{\text{spec., } 1} + \\
 &\quad + \frac{\frac{T_{\text{spec., } 2} + T_{\text{spec., } 3}}{2}}{L_{\text{spec., } 2}} L_{\text{spec., } 2} + \dots = \\
 &= \frac{T_{\text{spec., } 0} + T_{\text{spec., } 1}}{2} + \frac{T_{\text{spec., } 1} + T_{\text{spec., } 2}}{2} + \frac{T_{\text{spec., } 2} + T_{\text{spec., } 3}}{2} + \dots = \\
 &= \sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right),
 \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
 \sum_{x=a}^{x=b} \underline{\text{spec}}_x L_{\text{spec.}, x} &= \sum_{x=a}^{x=b} e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} L_{\text{spec.}, x} = \\
 &= \sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right) = \\
 \sum_{x=0}^{x=\omega} \underline{\text{spec}}_x L_{\text{spec.}, x} &= \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} L_{\text{spec.}, x} = \\
 &= \sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right) .
 \end{aligned}$$

Könnyen belátható, hogy:

$$\begin{aligned}
 2 \sum_{x=a}^{x=b} \underline{\text{spec}}_x L_{\text{spec.}, x} &= 2 \sum_{x=a}^{x=b} e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} L_{\text{spec.}, x} = \\
 &= \sum_{x=a}^{x=b} \underline{\text{spec}}_x L_{\text{spec.}, x} + \sum_{x=a}^{x=b} e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} L_{\text{spec.}, x} = \\
 &= \sum_{x=a}^{x=b} \left[L_{\text{spec.}, x} \left(\underline{\text{spec}}_x + e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} \right) \right] ,
 \end{aligned}$$

illetve, hogy:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \sum_{x=a}^{x=b} \left[L_{\text{spec.}, x} \left(\underline{\text{spec}}_x + e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} \right) \right] &= \sum_{x=a}^{x=b} e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} L_{\text{spec.}, x} = \\
 &= \sum_{x=a}^{x=b} \underline{\text{spec}}_x L_{\text{spec.}, x} .
 \end{aligned}$$

Megállapítható továbbá, hogy:

$$\begin{aligned}
 \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \underline{\text{spec}}_x L_{\text{spec.}, x}}{\underline{\text{spec}}_{a, b} T_{\text{spec.}, o}} &= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} e_{\underline{\text{spec.}, x}}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} =
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)}{T_{\text{spec.}, o}} =$$

és

$$2 \bar{a}_{\text{spec.}, a, b} = \frac{2 \sum_{x=a}^{x=b} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{2 \sum_{x=a}^{x=b} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}} =$$

$$= \sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{T_{\text{spec.}, o}} \right),$$

vagyis

$$\bar{a}_{\text{spec.}, a, b} = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=a}^{x=b} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)}{T_{\text{spec.}, o}}.$$

Az $\sum_{x=a}^{x=b} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x} = \sum_{x=a}^{x=b} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}$ egyenlőség látszólag

azonos eredményt ad az $\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec.}, x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_x$ egyenlőséggel, mindkét

egyenlőség mindkét oldala ugyanis egyenlő $\sum \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)$ - vel.

Az utóbbi egyenlőség esetében azonban a közös eredményt definiáló formulában jelzett összegezés minden életkorra kiterjed, az előbbiben pedig csupán azokra az életkorokra, melyekben a vonatkozó szubpopuláció előfordul, ezért valójában

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec., } x} > \sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{\text{spec}_x} L_{\text{spec., } x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} \frac{\text{spec}_x}{\text{spec}_x} L_{\text{spec., } x} ,$$

illetve

$$\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x > \sum_{x=a}^{x=b} \frac{e_{\text{spec., } x}^{o'}}{\text{spec}_x} L_{\text{spec., } x} = \sum_{x=0}^{x=\omega} \frac{e_{\text{spec., } x}^{o'}}{\text{spec}_x} L_{\text{spec., } x} .$$

7. A stacionér szubpopulációk számának néhány meghatározási lehetősége az általuk már leélt és az általuk még leélendő évek száma egyenlőségére vonatkozó speciális tételek alapján. E tételekből adódó néhány további összefüggés és következtetés

A stacionér szubpopulációk fentebb bemutatott sajátosságai alapján lehetővé válik, hogy e szubpopulációk létszámát is az eddigiektől eltérő módon határozzuk meg. Könnyen belátható például, hogy valamely tetszőleges t-időpontban megfigyelt stacionér szubpopuláció létszáma az ezen szubpopulációt alkotó születési évjáratok által a vonatkozó specifikus állapothoz tartozás állapotában leélt összes évek számának egy születési évjáratra jutó hányadosaként, illetve: a stacionér össznépesség által a vonatkozó specifikus állapothoz tartozás állapotában leélt összes évek számának és az össznépességet alkotó születési évjáratok számának (n) a hányadosaként is meghatározható. Ez utóbbi koncepció alapján:

$$\begin{aligned} T_{\text{spec., } o} &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_{\text{spec., } o} - e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x}{n} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., } o} - e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x}{n} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., } o} - e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'}) \right]}{n} = \\ &= \text{stb.} \end{aligned}$$

A fenti formulákban

$$\sum_{x=0}^{\omega} (T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x)$$

a vonatkozó specifikus állapothoz tartozás állapotában a megfigyelés állapotáig leélt összes éveknek a számát,

$$\sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x$$

a vonatkozó specifikus állapothoz tartozás állapotában a megfigyelés időpontjáig továbbélők által leélt éveknek a számát,

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x \right]$$

pedig a vonatkozó specifikus állapothoz tartozás állapotában a megfigyelés időpontjáig meghaltak által leélt éveknek a számát mutatja.

A fenti formuláknak a korábbiak figyelembevétele alapján lehetséges további felírási módjai:

$$\begin{aligned} T_{\text{spec., o}} &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x}{x_{\text{max}} + 1} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x}{x_{\text{max}} + 1} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (\text{spec}_x + e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right]}{x_{\text{max}} + 1}, \end{aligned}$$

továbbá:

$$T_{\text{spec., o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} (T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x}{\frac{N}{2}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x}{\frac{N}{2}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (\text{spec}_x + e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right]}{\frac{N}{2}} = \text{stb.,}$$

illetve

$$T_{\text{spec., o}} = \frac{2 \left[\sum_{x=0}^{\omega} (T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x \right]}{N} =$$

$$= \frac{2 \left\{ \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x \right\}}{N} =$$

$$= \frac{2 \left\{ \sum_{x=0}^{\omega} \left[(T_{\text{spec., o}} - e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x) - \text{spec}_x L_x \right] + \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (\text{spec}_x + e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right] \right\}}{N} = \text{stb.}$$

A $T_{\text{spec., o}}$ értékének valamennyi fenti meghatározásában maga a $T_{\text{spec., o}}$ is szerepet játszik, e mutató értékének számos ilyen meghatározása is felirható azonban, melynek ez nem jellemzője. Könnyen belátható például, hogy:

$$T_{\text{spec., o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_{\text{spec., x}}}{\bar{a}_{\text{spec.}}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_x}{\bar{a}_{\text{spec.}}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_{\text{spec., x}} + T_{\text{spec., x+1}})}{2}}{\bar{a}_{\text{spec.}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_x}{\bar{p}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec., x}}}{\bar{p}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{(T_x + T_{x+1})}{2} \text{spec., x} \right]}{\bar{p}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., x}}}{\bar{a}_{\text{spec}}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., x}}^{o'} L_{\text{spec., x}}}{\bar{a}_{\text{spec}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{x=\omega} \left[L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'}) \right]}{\bar{a}_{\text{spec}}} =$$

$$= \frac{2 \sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x}}{2 \bar{a}_{\text{spec}}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x}}{2 \bar{a}_{\text{spec}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'}) \right]}{2 \bar{a}_{\text{spec}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{\bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} L_{\text{spec., } x}}{\bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{e_{\text{spec., } x}^{o'}}{\bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} L_{\text{spec., } x}}{\bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=a}^{x=b} \left[L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'}) \right]}{\bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{(T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1})}{2}}{\bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} =$$

$$= \frac{2 \sum_{x=a}^{x=b} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x}}{2 \bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} = \frac{2 \sum_{x=a}^{x=b} e_{\text{spec}_x}^{o'} L_{\text{spec., } x}}{2 \bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left[L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'}) \right]}{2 \bar{a}_{\text{spec}_{a,b}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} (T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1})}{2 \bar{a}_{\text{spec}, a, b}} = \text{stb.}$$

A fentiek alapján könnyen belátható, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec., } x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)},$$

vagyis, hogy a valamely stacionér szubpopuláció által a megfigyelés időpontjáig összesen leélt éveknek a száma úgy aránylik a stacionér össznépesség által összesen leélt éveknek a számához, mint az ezen össznépesség által a vonatkozó specifikus állapotban még leélendő éveknek a száma az általa összesen leélendő éveknek a számához, továbbá:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec., } x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec., } x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)},$$

vagyis, hogy valamely stacionér népesség által a megfigyelés időpontjáig valamely speciális állapotban leélt éveknek a száma úgy aránylik az általa összesen leélt éveknek a számához, mint a vonatkozó stacionér szubpopuláció által még összesen leélendő éveknek a száma a stacionér össznépesség által összesen leélendő éveknek a számához, továbbá:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right) \text{spec., } x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)},$$

vagyis, hogy a valamely stacionér szubpopuláció által a megfigyelés időpontjáig a vonatkozó specifikus állapotban leélt éveknek a száma úgy aránylik a stacionér össznépesség által összesen leélt éveknek a számához, mint az ezen szubpopuláció által a vonatkozó specifikus állapotban még leélendő éveknek a száma a stacionér össznépesség által összesen leélendő évek számához, továbbá:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec.}, x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec.}, x}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec.}, x}$$

vagyis, hogy a valamely stacionér szubpopuláció által a megfigyelés időpontjáig összesen leélt éveknek a száma úgy aránylik a stacionér össznépesség által a vonatkozó specifikus állapotban leélt éveknek a számához, mint az ezen össznépesség által a vonatkozó specifikus állapotban leélendő éveknek a száma a szóban forgó szubpopuláció által összesen leélendő éveknek a számához, továbbá:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec.}, x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right) \text{spec.}, x}$$

vagyis, hogy a valamely stacionér szubpopuláció által a megfigyelés időpontjáig összesen leélt éveknek a száma úgy aránylik az ezen szubpopuláció által a vonatkozó specifikus állapotban leélt éveknek a számához, mint a stacionér össznépesség által a vonatkozó specifikus állapotban leélendő éveknek a száma a szóban forgó szubpopuláció által a vonatkozó specifikus állapotban leélendő éveknek a számához, továbbá:

$$\frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}} = \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec., } x}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right) \text{spec., } x}$$

vagyis, hogy a valamely stacionér népesség által a megfigyelés időpontjáig valamely specifikus állapotban leélt éveknek a száma ugy aránylik a vonatkozó szubpopuláció által ezen speciális állapotban leélt éveknek a számához, mint az ezen szubpopuláció által még összesen leélendő éveknek a száma az általa a vonatkozó specifikus állapotban leélendő éveknek a számához.

Minthogy sikerült bebizonyítanunk azt is, hogy

$$\sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{L_{\text{spec., } x}} = \sum_{x=0}^{x=b} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x},$$

megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{L_{\text{spec., } x}}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{x=b} \frac{e_{\text{spec., } x}^{o'}}{L_{\text{spec., } x}} L_{\text{spec., } x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)},$$

$$\frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{L_{\text{spec., } x}}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} x L_{\text{spec., } x}} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{e_{\text{spec., } x}^{o'}}{L_{\text{spec., } x}} L_{\text{spec., } x}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_x} =$$

$$\frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right)},$$

$$\frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{\text{spec}_{\cdot, x}} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_x} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{e_{\text{spec}_{\cdot, x}}^{o'}}{\text{spec}_{\cdot, x}} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_x^{o'} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec}_{\cdot, x}} + T_{\text{spec}_{\cdot, x+1}}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) \text{spec}_{\cdot, x}},$$

$$\frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{\text{spec}_x}{\text{spec}_{\cdot, x}} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec}_{\cdot, x}}} = \frac{\sum_{x=a}^{x=b} \frac{e_{\text{spec}_x}^{o'}}{\text{spec}_x} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}}{\sum_{x=0}^{x=\omega} e_{\text{spec}_{\cdot, x}}^{o'} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}} =$$

$$\frac{\sum_{x=a}^{x=b} \left(\frac{T_{\text{spec}_{\cdot, x}} + T_{\text{spec}_{\cdot, x+1}}}{2} \right)}{\sum_{x=0}^{x=\omega} \left(\frac{T_{\text{spec}_{\cdot, x}} + T_{\text{spec}_{\cdot, x+1}}}{2} \right) \text{spec}_{\cdot, x}}.$$

A fenti összefüggésekből az is kitűnik, hogy:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} = \\ & \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec}_{\cdot, x}}}{T_{\text{spec}_{\cdot, o}}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec}_{\cdot, x}}^{o'} L_{\text{spec}_{\cdot, x}}}{T_{\text{spec}_{\cdot, o}}} = \\ & = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)}{T_o} = \\ & = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec}_{\cdot, x}} + T_{\text{spec}_{\cdot, x+1}}}{2} \right) \text{spec}_{\cdot, x}}{T_{\text{spec}_{\cdot, o}}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{T_o} \\
& = \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} [L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'})]}{T_{\text{spec., } o}} \quad \text{illetve:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_x (x + e_x^{o'})]}{T_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} = \\
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} [L_{\text{spec., } x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., } x}^{o'})]}{T_{\text{spec., } o}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x}}{T_{\text{spec., } o}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)}{T_o} = \\
& \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x}}{T_{\text{spec., } o}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., } x} + T_{\text{spec., } x+1}}{2} \right) \text{spec., } x}{T_{\text{spec., } o}},
\end{aligned}$$

továbbá:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} = \\
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., } x}}{T_{\text{spec., } o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec., } x}^{o'} L_{\text{spec., } x}}{T_{\text{spec., } o}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)}{T_{\text{spec.}, o}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{T_o}, \text{ illetve: } \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_x (x + e_x^{o'}) \right]}{T_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{T_o} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec.}, x} (\text{spec}_x + e_{\text{spec.}, x}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}}$$

$$= \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x}{T_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)}{T_o} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} e_{\text{spec.}, x}^{o'} L_{\text{spec.}, x}}{T_{\text{spec.}, o}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec.}, x} + T_{\text{spec.}, x+1}}{2} \right)}{T_{\text{spec.}, o}},$$

továbbá:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\text{spec}_x}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\text{spec}_x}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{e_{\text{spec., x}}^{o'}}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\text{spec., x}}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., x}} + T_{\text{spec., x+1}}}{2} \right)}{T_{\text{spec., o}}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(\frac{T_{\text{spec., x}} + T_{\text{spec., x+1}}}{2} \right) \text{spec., x} \right]}{T_{\text{spec., o}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec., x}} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec., o}}} , \text{ illetve: } \frac{\frac{1}{2} \sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec., x}} (\text{spec}_x e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec., o}}}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec., x}} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right]}{T_{\text{spec., o}}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \frac{\text{spec}_x}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}}{\sum_{x=0}^{\omega} \left[L_{\text{spec., x}} (\text{spec}_x + e_{\text{spec., x}}^{o'}) \right]} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \text{spec}_x L_{\text{spec., x}}}{T_{\text{spec., o}}}$$

$$\frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \frac{e_{\text{spec., x}}^{o'}}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}}{2 \sum_{x=0}^{\omega} \frac{e_{\text{spec., x}}^{o'}}{T_{\text{spec., o}}} L_{\text{spec., x}}} = \frac{2 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., x}} + T_{\text{spec., x+1}}}{2} \right)}{2 \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{\text{spec., x}} + T_{\text{spec., x+1}}}{2} \right) \text{spec., x}} ,$$

A fentiekből kitűnt, hogy a valamely tetszőleges t-időpontban megfigyelt stacionér népesség annyi évet él le, ahány évet még le fog élni, s bizonyítható volt a stacionér szubpopulációkkal kapcsolatban is néhány analóg módon értelmezhető egyenlőség a megfigyelt népesség által a múltban leélt és a jövőben leélendő időtartamok, illetve: a múltban realizált és a jövőben realizálandó események mennyiségei között. Megállapíthatjuk tehát, hogy a stacionér populációk illetve szubpopulációk a vonatkozó jelenségek (ill. események) tekintetében egalitáriusak, vagyis belőlük a megfigyelés tetszőleges t-időpontja előtt és ezen időpont után egyenlő mennyiséget valószínűsítanak meg. A stacionér populációk és szubpopulációk azonban nem tekinthetők általában egalitáriusoknak, vagyis nem minden jelenségből (ill. eseményből) valószínűsítanak meg annyit a jövőben, amennyit a múltban valószínűsítettek meg, akkor sem, ha a jelenségek korszecifikus intenzitásai, illetve nagyságai minden születési évjáratban azonosak, időben állandóak. Ennek az az oka, hogy a stacionér populációk, illetve szubpopulációk által a múltban leélt és a jövőben leélendő évek számának nem ugyanaz az életkor szerinti megoszlása (korstrukturája). Az egalitárius népesség fogalma tehát nem azonosítható a stacionér népesség fogalmával. A stacionér populációk és szubpopulációk csak bizonyos jelenségek (ill. események) tekintetében egalitáriusak. Érdekes lenne megvizsgálni, hogy azon jelenségek (ill. események) szempontjából, melyek tekintetében a stacionér népességek, illetve alnépességek nem egalitáriusak, mely zérustól különböző évi növekedési ráta, illetve mely kohorszról-kohorszra változó halandósági jellemzők mellett válik egy népesség egalitáriussá. Azt is érdekes lenne megvizsgálni, hogy a vonatkozó események korszecifikus intenzitásainak, illetve nagyságainak milyen kohorszról-kohorszra megfigyelhető módosulásai következtében válna valamely stacionér populáció, illetve szubpopuláció ezen események tekintetében is egalitáriussá. Ezt a vizsgálatot természetesen nem stacionér népességekre is ki kellene terjeszteni és ki kellene mutatni például, hogy a népesség évi növekedési rátájának, halandóságának és a vonatkozó jelenségek (ill. események) életkoronkénti intenzitásainak, illetve nagyságainak mely - az eredeti állapottól való eltérést jelentő - módosulásai tekinthetők a népességnek a vonatkozó jelenségek (ill. események) szempontjából való egalitáriussá válása tekintetében egymással egyenértékűeknek. Az egalitárius népesség elméletét - melynek itt csupán a fogalmát (konceptióját) előlegeztük - még ki kell dolgozni. E munka elvégzése az elméleti népességtudomány művelőire váró feladat.

8. A bemutatott összefüggések illusztrálása a halandósági szint, a nettó reprodukciós együttható egységnyi értékét biztosító termékenységi szint és a gazdasági aktivitás, illetve inaktivitás korszecifikus arányszámai állandósulása esetén kialakuló hipotetikus stacionér populációk és szubpopulációk alapulvételével

Az alábbiakban a bemutatott összefüggések közül néhányat konkrétan is illusztrálunk a férfi és a női népesség 1910-1911. évi, 1920-1921. évi, 1930-1931. évi, 1948-1949. évi, 1959-1969. évi és 1969-1970. évi magyarországi halandósági táblájának, valamint a férfi és a női népesség vonatkozó hazai népszámlálásaink eredményei alapján becsülhető korcsoport-

3.4. A stationér össznépessegre, valamint a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív női népessége halandósági táblái, valamint a gazdasági aktivitás

Sor- szám	A halandósági tábla és a figyelembe vett gazdasági aktivitási (ill. inaktivitási) arányszámok évének megnevezése	A férfi népesség	A női népesség	A férfi népesség	A női népesség	
		1910 - 1911. évi		1920 - 1921. évi		
		halandósági táblája és korszpecifikus gazdasági				
1.	$T_o = \sum_{x=0}^{\omega} n L_x$	(fő, ill. év)	3 905 726,2	4 046 814,8	4 102 855,2	4 311 520,2
2.	$T_{g,o} = \sum_{x=0}^{\omega} n L_{g,x}$	(fő, ill. év)	2 768 962,3	738 817,7	2 865 341,2	1 057 302,4
3.	$T_{i,o} = \sum_{x=0}^{\omega} n L_{i,x}$	(fő, ill. év)	1 136 763,9	3 307 997,1	1 237 514,0	3 254 217,8
4.	$\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) n L_x \right] = \sum_{x=0}^{\omega} e_{x,x}^{o'} n L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{n(T_x + T_{x+n})}{2}$	(év)	125 716 505,2	131 328 338,0	134 455 424,5	143 296 602,0
5.	$\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) n L_{g,x} \right] = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} n L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2}$	(év)	107 767 499,1	26 322 549,0	113 320 289,2	36 571 822,8
6.	$\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) n L_{i,x} \right] = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} n L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2}$	(év)	17 949 006,1	105 005 789,0	21 135 135,3	106 724 779,2
7.	$\sum_{x=0}^{\omega} g_x n L_x = e_{x,x}^{o'} n L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_x + T_{x+n})}{2} \right]_{g,x}$	(év)	76 456 970,0	22 562 772,6	80 499 382,5	34 317 369,9
8.	$\sum_{x=0}^{\omega} i_x n L_x = e_{x,x}^{o'} n L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_x + T_{x+n})}{2} \right]_{i,x}$	(év)	49 259 535,2	108 765 565,4	53 956 042,0	108 979 232,1
9.	$\sum_{x=0}^{\omega} g_x n L_{g,x} = e_{g,x}^{o'} n L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2} \right]_{g,x}$	(év)	68 001 385,9	4 565 827,4	70 382 839,5	8 810 582,5
10.	$\sum_{x=0}^{\omega} i_x n L_{i,x} = e_{i,x}^{o'} n L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2} \right]_{i,x}$	(év)	9 493 421,5	87 008 843,4	11 018 592,1	81 217 991,2
11.	$\sum_{x=0}^{\omega} i_x n L_{g,x} = e_{g,x}^{o'} n L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2} \right]_{i,x}$	(év)	39 766 113,2	21 756 721,6	42 937 449,7	27 761 240,3
12.	$\sum_{x=0}^{\omega} g_x n L_{i,x} = e_{i,x}^{o'} n L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2} \right]_{g,x}$	(év)	8 455 584,6	17 996 945,6	10 116 543,2	25 506 788,0
13.	$\sum_{x=a}^b g_x n L_{g,x} = e_{g,x}^{o'} n L_{g,x} = \sum_{x=a}^b \frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2}$	(év)	80 077 876,3	18 934 371,8	84 666 877,0	25 998 798,5
14.	$\sum_{x=a}^b i_x n L_{i,x} = e_{i,x}^{o'} n L_{i,x} = \sum_{x=a}^b \frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2}$	(év)	17 949 006,1	105 605 789,0	21 135 135,3	106 724 779,2
15.	$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) n L_x \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} n L_x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r=0,x}$	(év)	32,19	32,45	32,77	33,24
16.	$\bar{a}_g = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) n L_{g,x} \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} n L_{g,x}} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r=0,g,x}$	(év)	38,92	35,63	39,55	34,59
17.	$\bar{a}_i = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) n L_{i,x} \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} n L_{i,x}} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r=0,i,x}$	(év)	15,79	31,74	17,08	32,80

Megjegyzés: A számításokhoz felhasznált adatok a már idézett halandósági táblák vonatkozó adatain kívül az 1960. évi és az 1970. évi magyarországi népszámlálási publikációknak a gazdasági aktivitásra (ill. inaktivitásra) vonatkozó, a korábbi népszámlálásokra vonatkozóan is megadott korszpecifikus arányszámai voltak.

stacionér szubpopulációkra vonatkozó néhány becslési eredmény Magyarország férfi és (ill. inaktivitás) vonatkozó korspecifikus arányszámai alapján

A férfi népesség	A női népesség	A férfi népesség	A női népesség	A férfi népesség	A női népesség	A férfi népesség	A női népesség	Sor-szám
1930-1931. évi		1948-1949. évi		1959-1960. évi		1969-1970. évi		
aktivitási (ill. inaktivitási) arányszámai alapján								
4 868 923,5	5 179 558,8	5 875 805,4	6 324 481,2	6 516 598,5	6 955 650,3	6 650 217,5	7 210 394,5	1.
3 349 558,1	1 106 471,0	3 934 288,8	1 512 858,1	4 412 897,9	2 272 029,4	3 880 152,8	2 667 186,2	2.
1 519 365,4	4 073 087,8	1 941 516,6	4 811 623,1	2 103 700,6	4 683 620,9	2 770 064,7	4 543 208,3	3.
166 884 841,6	181 161 769,7	210 017 669,9	235 376 162,1	236 769 442,7	264 009 952,1	241 277 668,8	277 574 590,0	4.
135 188 188,3	40 115 417,7	161 993 687,3	57 720 029,6	181 921 206,0	89 599 276,9	155 130 532,8	100 501 496,3	5.
31 696 654,3	141 046 352,0	48 023 982,6	177 656 132,5	54 848 236,7	174 410 675,2	86 147 136,0	177 073 093,7	6.
98 504 781,5	37 427 740,0	121 233 296,1	54 425 840,9	138 756 033,9	81 634 005,0	124 951 225,2	102 311 179,5	7.
68 380 060,1	143 734 029,7	88 784 373,4	180 950 321,2	98 013 408,8	182 375 947,1	116 326 443,6	175 263 410,5	8.
82 267 304,6	8 331 348,6	95 993 334,1	13 424 336,1	109 028 100,1	27 930 707,3	81 893 274,6	37 442 605,4	9.
15 459 176,9	111 949 960,6	22 784 020,4	136 654 627,3	25 120 302,6	120 707 377,5	43 089 185,0	112 204 519,8	10.
52 920 883,7	31 784 069,1	66 000 353,2	44 295 693,5	72 893 105,9	61 668 569,6	73 237 258,2	63 058 890,9	11.
16 237 477,4	29 096 391,4	25 239 962,2	41 001 505,2	29 727 934,1	53 703 297,7	43 057 951,0	64 868 574,1	12.
101 692 606,8	29 050 707,5	106 913 643,7	36 540 016,0	120 140 635,4	57 790 865,1	100 808 393,6	63 160 890,1	13.
31 696 654,3	141 046 352,0	48 023 982,6	177 656 132,5	54 848 236,7	174 410 675,2	86 147 136,0	177 073 093,7	14.
34,28	34,98	35,74	37,22	36,33	37,96	36,28	38,50	15.
40,36	36,26	41,17	38,15	41,22	39,44	39,98	37,68	16.
20,86	34,63	24,74	36,92	26,07	37,24	31,10	38,98	17.

tonkénti gazdasági aktivitási, illetve inaktivitási arányszámainak az alapulvételével végzett számításaink alapján. A szóban forgó összefüggések a férfi és a női népességre vonatkozóan természetesen külön-külön is érvényesek; a mindkét nembeli népességre vonatkozó eredmények a korábbiakban vázolt összesúlyozási módszerrel lennének előállíthatók. A felhasznált halandósági táblák a férfi és a női népesség esetében egyaránt az élveszületések 100 000-et kitevő számából ($l_0 = 100\ 000$) indulnak ki s az illusztrációként felhozott számítási eredményeket természetesen ez a tény is befolyásolja. Amennyiben a halandósági táblák által leírt halandósági szintek, korszpecifikus gazdasági aktivitási, illetve inaktivitási arányszámok és a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi értékét biztosító termékenységi szint állandósulna, a kialakuló stacionér férfi és női össznépességek, valamint gazdaságilag aktív és gazdaságilag inaktív alnépességek száma a második fejezet első pontjában vázolt feltételektől is függene, e feltételek tehát a stacionérrá vált férfi és női népesség által összesen leélt és összesen leélendő évek számát, gazdaságilag aktívan, ill. inaktívan leélt és leélendő évek számát stb. is befolyásolnák. Alábbi számítási eredményeink csak a vonatkozó halandósági táblák és korszpecifikus aktivitási, illetve inaktivitási arányszámok alapulvételével végzett számítások eredményei s kizárólag az e fejezet hatodik és hetedik pontjában vázolt összefüggések illusztrálása céljából közöljük azokat, egyéb elemzési célokra való felhasználásuk természetesen számos további számítást igényel. Minthogy a gazdasági aktivitás (ill. inaktivitás) arányszámai csupán öt éves korcsoportokra vonatkozóan állottak rendelkezésünkre, a felhasznált halandósági tábláknak is az összevont változatait kellett használnunk, ezzel magyarázható, hogy a már ismerttetett szimbólumoknak a felhasználásával összeállított 3. 4. tábla bizonyos mutatóinak az értékei a becslés kisebb pontossága miatt egyes esetekben némileg eltérnek a más összefüggésben korábban is közölt azonos tartalmu mutatóknak az értékeitől.

A koréves rendelkezésű táblák jelölési módszerére visszatérve konkrét számítások alapján is kimutattuk tehát, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} xL_x = \sum_{x=0}^{\omega} xL_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} xL_{i,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)$$

és beláttuk azt is, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} xL_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} xL_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} xL_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right).$$

Következésképpen:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} xL_x &= \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) + \\ &+ \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} xL_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} xL_{i,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} xL_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} xL_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x.$$

továbbá:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} xL_{g,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} xL_x - \sum_{x=0}^{\omega} xL_{i,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} xL_x - \sum_{x=0}^{\omega} xL_{i,x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x,$$

végül:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x L_{i,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) \\ &\quad \cdot \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \sum_{x=0}^{\omega} x L_{g,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \sum_{x=0}^{\omega} x L_{g,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x \end{aligned}$$

Bebizonyítottuk továbbá, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_x$$

és beláttuk azt is, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x}$$

Következőképpen:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x} \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x},$$

továbbá:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x} \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x}$$

végül:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x} \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x}$$

Figyelembe véve, hogy $g_x + i_x = x$ és $L_{g,x} + L_{i,x} = L_x$ könnyen belátható, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_{g,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_{i,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_{,x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_{,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_{,x}$$

A fentieket figyelembe véve többek között bebizonyítottuk, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x}$$

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)_{i,x} + \\ &+ \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)_{i,x} \end{aligned}$$

és beláttuk, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)_{g,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)_{i,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)_{g,x}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)_{i,x}$$

Következésképpen:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x &= \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \\ &+ \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right)_{i,x} + \\ &+ \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)_{i,x} \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{i,x} + \\
&+ \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{i,x} \\
&\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) = \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \\
&\hspace{25em} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x},
\end{aligned}$$

továbbá:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} \right) = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{i,x} + \right. \\
&\hspace{15em} \left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{i,x} \right] \\
\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} \right) = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_x + \right. \\
&\hspace{15em} \left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{i,x} \right]
\end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} \right)$$

továbbá:

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} \right]$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_{,x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} \right] =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \right.$$

$$\left. + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} \right)$$

továbbá:

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_x \right]$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_x \right]$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_x = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} \right),$$

végül:

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_x + \right.$$

$$\left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_x \right]$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) - \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{,x} + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} \Bigg] \\
\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} \right) = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x - \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} \right).
\end{aligned}$$

Bebizonyítottuk végül, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{x=a}^b g_x L_{g,x} &= \sum_{x=a}^b e_{g,x}^{o'} L_{g,x} = \sum_{x=a}^b \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) \\
\sum_{x=a}^b i_x L_{i,x} &= \sum_{x=a}^b e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=a}^b \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)
\end{aligned}$$

és beláttuk, hogy amennyiben

$$a = 0$$

és

$$b = \omega,$$

mint például a gazdaságilag inaktív népesség esetében

$$\begin{aligned}
\sum_{x=a}^b i_x L_{i,x} &= \sum_{x=0}^{\omega} x L_{i,x}; \quad \sum_{x=a}^b e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x \quad \text{és} \\
\sum_{x=a}^b \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) &= \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right).
\end{aligned}$$

Ebben az esetben tehát az

$$\sum_{x=a}^b i_x L_{i,x} = \sum_{x=0}^b e_{i,x}^{o'} L_{i,x} = \sum_{x=0}^b \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)$$

egyenlőségsorozat helyett a

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_{i,x} = \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right)$$

egyenlőségsorozat is írható.

IV. A STABIL NÖVEKVŐ, ILLETVE CSÖKKENŐ POPULÁCIÓK ÉS SZUBPOPULÁCIÓK DEMOGRÁFIAI JELLEMZŐI, VALAMINT DEMOGRÁFIAI ÉS GAZDASÁGI JELLEMZŐI KÖZÖTT FENNÁLLÓ FŐBB KAPCSOLATOK

1. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség ismert tulajdonságai kohorsz- szemlélet alapján történő meghatározása

Értekezésünk első fejezetében kimutattuk, hogy a stabil népesség olyan népesség, melynek

- nyers születési arányszáma állandó;
- nyers halálozási arányszáma állandó;
- nyers születési és halálozási arányszámának a különbségét jelentő természetes szaporodási, ill. fogyási arányszáma állandó, vagyis e népesség száma időszakról időszakra (pl. évről-évre) ugyanolyan arányban változik;
- nyers születési, halálozási és természetes szaporodási, ill. fogyási arányszámának a változatlansága folytán a születések és halálozások száma időszakról időszakra (pl. évről évre) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint a népesség száma;
- korösszetétele állandó;
- korszpecifikus termékenységi arányszámai és korösszetétele változatlansága folytán tulajdonsága az is, hogy benne az élveszületéseknek az anyák életkor szerinti megoszlása is állandó;
- korszpecifikus halálozási arányszámai és korösszetétele változatlansága következtében sajátossága az is, hogy benne a halálozások kormegoszlása is állandó
- stb.

A népesség kormegoszlásának, illetve a mindkét nembeli stabil népesség nemek és kor szerinti strukturájának és az élveszületések az anyák életkora szerinti megoszlásának a változatlansága következtében stabil népességben állandó az anyák, s - mutatis mutandis - az apák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor; a népesség és a halálozások kormegoszlásának a változatlansága pedig e népességben a meghaltak átlagos életkorának a változatlanságát eredményezi.

Értekezésünk első fejezetében matematikailag is demonstráltuk és elemeztük a stabil népesség felsorolt tulajdonságainak az interdependenciáját és jeleztük, hogy a transzverzális megfigyelés eredményeinek a népmozgalmi események (közöttük a leélt idő) egyes kohorszokban megfigyelhető alakulására való visszavezetése alapján ujszerű megközelítése, illetve meghatározása adható többek közt a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség ismert - mindezt csupán a transzverzális megfigyelés aspektusából definiált - sajátosságainak is.

Lássuk most ismét és írjuk le matematikailag is a stabil népesség ismert tulajdonságainak kohorsz-szemlélet alapján történő származtatását.

A stabil népesség az általa leélt idő szempontjából tekintve - mint láttuk - olyan népességgént is meghatározható, melyben az egymást követő születési évjáratok (generációk) által leélt éveknek a száma évjáratról-évjáratra (születési kohorszról-születési kohorszra) azonos irányban és arányban változik (nö, illetve csökken), a leélt évek életkor szerinti megoszlása (naptára) pedig minden születési évjárat (generáció) esetében azonos. A különböző életkorhoz tartozás állapotában leélt éveknek a száma tehát születési évjáratról-születési évjáratra (generációról-generációra) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint az egyes évjáratok által összesen leélt éveknek a száma. Minthogy stabil népességben a születéskor várható átlagos élettartamnak (e_0^0) az értéke minden generáció esetében azonos (s ezért időben változatlan, állandó) az egyes születési évjáratok által összesen leélt évek számának a változása kizárólag a vonatkozó évjáratok születéskori számának (születésszámának) a változásából adódhatik,* vagyis stabil népességben az élveszületések száma születési évjáratról-születési évjáratra (generációról-generációra) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint az általuk leélt éveknek a száma. A stabil népességnek ez a sajátossága abból adódik, hogy a korszpecifikus termékenységi arányszámok minden születési évjáratban (generációban) azonosak, (s emiatt azonos minden generációban az anyák átlagos életkora is gyermekeik megszületésekor). Azonosak - mint ismeretes - minden születési évjáratban (generációban) a korszpecifikus halálozási arányszámok (s így a meghaltak átlagos életkora) is, ezért a halálozások száma is évjáratról-évjáratra (generációról-generációra) ugyanolyan irányban és arányban változik, mint az összesen leélt éveknek a száma. Minthogy minden ujszülött halandó, az egyes születési évjáratokban előforduló halálozások száma zárt népességben azonos a vonatkozó évjáratok születéskori számával (születésszámával). Stabil népességben tehát az egyes születési évjáratokban (generációkban) a születésszám és a halálozások száma, valamint az összes leélt évek száma közötti arány (a születési és a halálozási arányszám) azonos, időben változatlan és egymással egyenlő. E sajátosságok következtében a népességet időpontról-időpontra, illetve naptári időszakról-naptári időszakra (pl. naptári évről-naptári évre), vagyis transzverzálisan vizsgálva azt találjuk, hogy:

- a népesség száma időszakról-időszakra (pl. évről évre) ugyanolyan irányban és arányban változik (nö, illetve csökken);

- az élveszületések és a halálozások száma is időszakról-időszakra (például évről évre) ugyanolyan irányban és arányban változik, s ez az irány és arány azonos a népesség száma változásának az irányával; a nyers születési és halálozási arányszám tehát időbelileg változatlan (állandó);

- a korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok transzverzálisan mérve időben változatlanok és azonosak az egyes születési évjáratokban megfigyelhetőkkel;

*Ismeretes, hogy az egyes születési évjáratok által leélt éveknek a száma születésszámuknak és születéskor várható átlagos élettartamuknak a szorzataként is definiálható.

- a népesség korösszetétele időben változatlan, de nem azonos az egyes születési évjáratok egymáséval azonos, időben szintén változatlan korösszetételével, mert a különböző korúak száma különböző születésszámu születési évjáratok (generációk) a megfigyelés időpontjáig továbbélőiből származik, ezért:

- az élveszületések és a halálozások száma időszakról-időszakra (pl. évről évre) ugyanolyan irányban és arányban változik ugyan, de egyes időszakok (pl. naptári évek) alatti számuk nem egyenlő egymással;

- a nyers születési és halálozási arányszám időben változatlan ugyan, de nem egyenlő egymással és az egyes születési évjáratokban megfigyelhetőkkel; a köztük lévő különbség: a természetes szaporodás intrinszc arányszáma tehát állandó ugyan, de nem egyenlő zérussal;

- a korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámok, valamint a korösszetétel változatlansága következtében időben változatlan ugyan az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor és változatlan a meghaltak átlagos életkora is, de ezek az átlagos életkorok nem azonosak az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhetőkkel stb.

Hogyan írható le matematikailag a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség tulajdonságainak kohorsz-szemlélet alapján történő származtatása. A III. 3., a III. 4. és a III. 5. ábrákban és az előző fejezet kapcsolódó részében alkalmazott jelöléseknek és az ugyanazon ábrák által szemléltetett összefüggéseknek a figyelembevételével megállapítható, hogy stabil növekvő, illetve csökkenő népességben:

$$T_{o,0} \neq T_{o,1} \neq T_{o,2} \neq \dots \neq T_o \neq \dots \neq T_o,$$

hanem

$$\frac{T_{o,1}}{T_{o,0}} = \frac{B_{o,1} e_{o,1}^o}{B_{o,0} e_{o,0}^o} = \frac{e_{o,1}^o}{e_{o,0}^o} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,0}} = \frac{B_{o,1}}{B_{o,0}} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,0}} = k$$

$$\frac{T_{o,2}}{T_{o,1}} = \frac{B_{o,2} e_{o,2}^o}{B_{o,1} e_{o,1}^o} = \frac{e_{o,2}^o}{e_{o,1}^o} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1}} = \frac{B_{o,2}}{B_{o,1}} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1}} = k$$

$$\frac{T_{o,3}}{T_{o,2}} = \frac{B_{o,3} e_{o,3}^o}{B_{o,2} e_{o,2}^o} = \frac{e_{o,3}^o}{e_{o,2}^o} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,3}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2}} = \frac{B_{o,3}}{B_{o,2}} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,3}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2}} = k$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$\frac{T_{o,i}}{T_{o,i-1}} = \frac{B_{o,i} e_{o,i}^o}{B_{o,i-1} e_{o,i-1}^o} = \frac{D_{o,i} e_{o,i}^o}{D_{o,i-1} e_{o,i-1}^o} = \frac{B_{o,i}}{B_{o,i-1}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i-1}} = k.$$

Ebben az esetben $k = \frac{1}{1+r} \neq 1$; mint stacionér népesség esetében, mert $r \neq 0$, hanem $r > 0$, illetve $r < 0$. Ha $r > 0$, akkor $k < 1$, vagyis a népesség stabil növekvő, ha viszont $r < 0$, akkor $k > 1$, vagyis a népesség stabil csökkenő. A fenti egyenlőségsorozatok megértésének a megkönnyítése céljából ismét felidézzük, hogy a stabil növekvő, illetve csökkenő népességre is vonatkozik, hogy

$$e_{o,0}^o = e_{o,1}^o = e_{o,2}^o = \dots = e_{o,i}^o = \dots = e_o^o,$$

vagyis, hogy a születéskor várható átlagos élettartam (e_o^o) értéke a népességet alkotó valamennyi születési évjárat esetében azonos nagyságú.

A fentiek alapján megállapítható, hogy:

$$\begin{aligned} T_{o,1} &= T_{o,0} \quad k \\ T_{o,2} &= T_{o,1} \quad k = T_{o,0} \quad k^2 \\ T_{o,3} &= T_{o,2} \quad k = T_{o,0} \quad k^3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ T_{o,i} &= T_{o,i-1} \quad k = T_{o,0} \quad k^i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned} B_{o,1} e_{o,1}^o &= B_{o,0} e_{o,0}^o \quad k \\ B_{o,2} e_{o,2}^o &= B_{o,1} e_{o,1}^o \quad k = B_{o,0} e_{o,0}^o \quad k^2 \\ B_{o,3} e_{o,3}^o &= B_{o,2} e_{o,2}^o \quad k = B_{o,0} e_{o,0}^o \quad k^3 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ B_{o,i} e_{o,i}^o &= B_{o,i-1} e_{o,i-1}^o \quad k = B_{o,0} e_{o,0}^o \quad k^i \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

illetve

$$e_{o,1}^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1} = e_{o,0}^o \quad k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,0}$$

$$e_{o,2}^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} = e_{o,1}^o k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1} = e_{o,o}^o k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$e_{o,3}^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,3} = e_{o,2}^o k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} = e_{o,o}^o k^3 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$e_{o,i}^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i} = e_{o,i-1}^o k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i-1} = e_{o,o}^o k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$\begin{array}{cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

továbbá

$$B_{o,1} = B_{o,o} k$$

$$B_{o,2} = B_{o,1} k = B_{o,o} k^2$$

$$B_{o,3} = B_{o,2} k = B_{o,o} k^3$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$B_{o,i} = B_{o,i-1} k = B_{o,o} k^i$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

és

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1} = k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} = k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1} = k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,3} = k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} = k^3 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i} & = & k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,i-1} & = & k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,0} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

A leírtak alapján még gazdagabb értelmet nyer az a már az első fejezetben is szereplő megállapítás, hogy ha $k < 1$, vagyis ha $r > 0$, a népesség stabil növekvő, ha $k > 1$, vagyis ha $r < 0$, a népesség stabil csökkenő, ha végül $k = 1$, vagyis ha $r = 0$, a népesség stacionér.

Stabil növekvő, illetve csökkenő népességben, ugyanugy mint stacionér népességben, az összesen leélt évek számának az életkor szerinti megoszlása (naptára) a népességet alkotó minden születési évjáratban (generációban) azonos, vagyis:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{0,0} & = & \alpha_{0,1} & = & \alpha_{0,2} & = & \dots = \alpha_{0,i} = \dots = \alpha_0 \\ \alpha_{1,0} & = & \alpha_{1,1} & = & \alpha_{1,2} & = & \dots = \alpha_{1,i} = \dots = \alpha_1 \\ \alpha_{2,0} & = & \alpha_{2,1} & = & \alpha_{2,2} & = & \dots = \alpha_{2,i} = \dots = \alpha_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{i,0} & = & \alpha_{i,1} & = & \alpha_{i,2} & = & \dots = \alpha_{i,i} = \dots = \alpha_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

és a halandóságnak az egyes születési évjáratokban (generációkban) fennálló azonossága folytán azonosak az r_x^p továbbélési valószínűségeknek az egyes születési évjáratokban (generációkban) megfigyelhető értékei is, vagyis:

$$\begin{array}{ccccccc} r_{0,0}^p & = & r_{0,1}^p & = & r_{0,2}^p & = & \dots = r_{0,i}^p = \dots = r_0^p \\ r_{1,0}^p & = & r_{1,1}^p & = & r_{1,2}^p & = & \dots = r_{1,i}^p = \dots = r_1^p \\ r_{2,0}^p & = & r_{2,1}^p & = & r_{2,2}^p & = & \dots = r_{2,i}^p = \dots = r_2^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r_{i,0}^p & = & r_{i,1}^p & = & r_{i,2}^p & = & \dots = r_{i,i}^p = \dots = r_i^p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{array}$$

Az összesen leélt évek számának az azonos életkor szerinti megoszlása azonban az összesen leélt évek születési évjáratonként (generációnként) eltérő számainak az azonos

életkor szerinti megoszlását jelenti, az r_x^p továbbélési valószínűségek azonos értékei pedig az elveszültek születési évjáratonként (generációnként) eltérő számainak az azonos továbbélési valószínűségeit jelentik. Az azonos életkorokhoz tartozás állapotában leélt éveknek az abszolút száma, az (betöltött évek száma alapján) azonos életkorokig továbbélőknek az abszolút száma, illetve: az azonos koruaknak az abszolút száma ezért a különböző születési évjáratokban egymástól eltérően alakul:

$$\begin{aligned}
 P_{0,0} &\neq P_{0,1} \neq P_{0,2} \neq \dots \neq P_{0,i} \neq \dots \neq P_0 \\
 P_{1,0} &\neq P_{1,1} \neq P_{1,2} \neq \dots \neq P_{1,i} \neq \dots \neq P_1 \\
 P_{2,0} &\neq P_{2,1} \neq P_{2,2} \neq \dots \neq P_{2,i} \neq \dots \neq P_2 \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 P_{i,0} &\neq P_{i,1} \neq P_{i,2} \neq \dots \neq P_{i,i} \neq \dots \neq P_i \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

vagyis

$$\begin{aligned}
 T_{0,0} \propto_{0,0} &\neq T_{0,1} \propto_{0,1} \neq T_{0,2} \propto_{0,2} \neq \dots \neq T_{0,i} \propto_{0,i} \neq \dots \neq T_0 \propto_0 \\
 T_{0,0} \propto_{1,0} &\neq T_{0,1} \propto_{1,1} \neq T_{0,2} \propto_{1,2} \neq \dots \neq T_{0,i} \propto_{1,i} \neq \dots \neq T_0 \propto_1 \\
 T_{0,0} \propto_{2,0} &\neq T_{0,1} \propto_{2,1} \neq T_{0,2} \propto_{2,2} \neq \dots \neq T_{0,i} \propto_{2,i} \neq \dots \neq T_0 \propto_2 \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 T_{0,0} \propto_{i,0} &\neq T_{0,1} \propto_{i,1} \neq T_{0,2} \propto_{i,2} \neq \dots \neq T_{0,i} \propto_{i,i} \neq \dots \neq T_0 \propto_i \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

illetve

$$\begin{aligned}
 B_{0,0} r_{0,0}^p &\neq B_{0,1} r_{0,1}^p \neq B_{0,2} r_{0,2}^p \neq \dots \neq B_{0,i} r_{0,i}^p \neq \dots \neq B_0 r_0^p \\
 B_{0,0} r_{1,0}^p &\neq B_{0,1} r_{1,1}^p \neq B_{0,2} r_{1,2}^p \neq \dots \neq B_{0,i} r_{1,i}^p \neq \dots \neq B_0 r_1^p \\
 B_{0,0} r_{2,0}^p &\neq B_{0,1} r_{2,1}^p \neq B_{0,2} r_{2,2}^p \neq \dots \neq B_{0,i} r_{2,i}^p \neq \dots \neq B_0 r_2^p \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 B_{0,0} r_{i,0}^p &\neq B_{0,1} r_{i,1}^p \neq B_{0,2} r_{i,2}^p \neq \dots \neq B_{0,i} r_{i,i}^p \neq \dots \neq B_0 r_i^p \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots
 \end{aligned}$$

A stabil növekvő, illetve csökkenő népességben, ugyanugy mint a stacionér népességben, a második kategóriába tartozó korszpecifikus termékenységi arányszámok ($t_{2,x,i}^b$) minden születési évjáratban (generációban) azonosak, vagyis:

$$\begin{array}{ccccccccc} t_{2,0,0}^b & = & t_{2,0,1}^b & = & t_{2,0,2}^b & = & \dots & = & t_{2,0,i}^b & = & \dots & = & t_{2,0}^b \\ t_{2,1,0}^b & = & t_{2,1,1}^b & = & t_{2,1,2}^b & = & \dots & = & t_{2,1,i}^b & = & \dots & = & t_{2,1}^b \\ t_{2,2,0}^b & = & t_{2,2,1}^b & = & t_{2,2,2}^b & = & \dots & = & t_{2,2,i}^b & = & \dots & = & t_{2,2}^b \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ t_{2,i,0}^b & = & t_{2,i,1}^b & = & t_{2,i,2}^b & = & \dots & = & t_{2,i,i}^b & = & \dots & = & t_{2,i}^b \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot \end{array}$$

Stacionér népességben - mint azt az előző fejezetben láttuk - az egyes születési évjáratokra vonatkozóan kiszámítható nyers születési arányszámok egymással is és a valamely naptári évre vonatkozóan kiszámíthatóval (b) is azonosak, mert - többek között - azonos minden születési évjáratban (generációban) az egyes életkorokhoz tartozás állapotában leélt éveknek az aránya és abszolút száma is, vagyis

$$b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = b.$$

Stabil növekvő, illetve csökkenő népességben minden születési évjáratban (generációban) azonos ugyan az egyes életkorokhoz tartozás állapotában leélt éveknek az aránya, de különböző ezen éveknek az abszolút száma, ezért az egyes születési évjáratokra vonatkozóan kiszámítható nyers születési arányszámok egymással azonosak ugyan, de nem azonosak a valamely naptári évre vonatkozóan kiszámíthatóval (b), vagyis:

$$b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots \neq b.$$

A stabil növekvő, illetve csökkenő népességben, ugyanugy mint a stacionér népességben, azonosak minden születési évjáratban a korszpecifikus halálozási arányszámok ($t_{2,x,i}^d$) is. A fentiekhez hasonló megfontolások alapján ezért könnyen beláthatjuk, hogy az egyes születési évjáratokra vonatkozóan kiszámítható nyers halálozási arányszámok ($d_0, d_1, d_2, \dots, d_i, \dots$) egymással azonosak ugyan, de nem azonosak a valamely naptári évre vonatkozóan kiszámíthatóval (d), vagyis

$$d_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_i = \dots \neq d.$$

Stacionér népességben viszont, mint láttuk:

$$d_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_i = \dots = d.$$

Mínt hogy stabil növekvő, illetve csökkenő népességben nem egyenlők egymással a halálozásoknak az egyes születési évjáratokban megfigyelhető, zárt népességben az élve-születésekével szükségképpen azonos számai, különbözők az azonos életkorban meghaltaknak az egyes születési évjáratokban megfigyelhető abszolút számai is, vagyis:

$$D_{0,0} \neq D_{0,1} \neq D_{0,2} \neq \dots \neq D_{0,i} \neq \dots \neq D_0$$

$$D_{1,0} \neq D_{1,1} \neq D_{1,2} \neq \dots \neq D_{1,i} \neq \dots \neq D_1$$

$$D_{2,0} \neq D_{2,1} \neq D_{2,2} \neq \dots \neq D_{2,i} \neq \dots \neq D_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$D_{i,0} \neq D_{i,1} \neq D_{i,2} \neq \dots \neq D_{i,i} \neq \dots \neq D_i$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

A népességet alkotó egyes születési évjáratokban megfigyelhető halálozások egymástól eltérő összes és életkoronkénti számai eltérnek természetesen a halálozások valamely naptári év alatt megfigyelhető összes, illetve életkoronkénti számaitól is.

Könnyen belátható, hogy nem csupán stacionér, hanem stabil növekvő, illetve csökkenő népességek esetében is fennáll, hogy

$$b_0 = d_0, \quad b_1 = d_1, \quad b_2 = d_2, \quad \dots, \quad b_i = d_i, \quad \dots,$$

viszont $b \neq d$, vagyis $b - d = r$ zérustól különböző nagyságu. Mínt hogy $e_{0,0}^0 = e_{0,1}^0 = e_{0,2}^0 = \dots = e_{0,i}^0 = \dots$, az is érthető, hogy

$$\begin{aligned} 1/e_{0,0}^0 &= 1/e_{0,1}^0 = 1/e_{0,2}^0 = \dots = 1/e_{0,i}^0 = \dots = \\ &= b_0 = b_1 = b_2 = \dots = b_i = \dots = \\ &= d_0 = d_1 = d_2 = \dots = d_i = \dots \neq b \neq d. \end{aligned}$$

Hasonló megfontolások alapján látható be, hogy stabil növekvő, illetve csökkenő népességben

- az anyák (és általában a szülők) gyermekeik megszületéskori átlagos életkorának az egyes születési évjáratokban megfigyelhető egymással azonos értékei nem azonosak e mutató transzverzálisan megfigyelhető értékével;

- a meghaltak átlagos életkorának az egyes születési évjáratokban megfigyelhető egymással azonos értékei nem azonosak e mutató transzverzálisan megfigyelhető értékével;

- az élők átlagos életkorának az egyes születési évjáratokban megfigyelhető egymással azonos értékei nem azonosak e mutató transzverzálisan megfigyelhető értékével;

- stb.

A szóban forgó mutatóknak a népességet alkotó egyes születési évjáratokra jellemző, vagyis longitudinálisan becsült értékei és egyes naptári időszakokra jellemző, vagyis transzverzálisan becsült értékei, mint jeleztük, azért térnek el egymástól, mert a transzverzálisan megfigyelt stabil növekvő, illetve csökkenő népességnek más a korösszetétele, mint a népességet alkotó születési évjáratok népességének, illetve ezen évjáratok halandósági táblái, valamint az ezekével azonos transzverzális halandósági tábla stacionér népességének a korösszetétele. Természetes tehát, hogy eltérő súlyarányok alkalmazása következtében más lesz a kiszámított súlyozott számtani átlagoknak az értéke is, ha az átlagolandó értékek minden helyzetben változatlanul ugyanazok maradnak is.

Hogyan alakul a transzverzálisan megfigyelt stabil növekvő, illetve csökkenő népesség létszáma és hogyan változik a stacionér népességéhez viszonyított korösszetétele?

Erre a kérdésre a népességet alkotó születési évjáratok népességszáma és korösszetétele, illetve az ezen évjáratok által leélt összes éveknek a száma és ez utóbbi életkor szerinti megoszlása hat kézenfekvőnek tűnő megközelítése alapján kíséreltünk meg választ adni.

Az első megközelítés:

$$\begin{aligned}
 P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0} + \dots + P_{i,0} + \dots &= \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} \\
 P_{0,0}^k + P_{1,0}^k + P_{2,0}^k + \dots + P_{i,0}^k + \dots &= k \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} = \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,1} \\
 P_{0,0}^{k^2} + P_{1,0}^{k^2} + P_{2,0}^{k^2} + \dots + P_{i,0}^{k^2} + \dots &= k^2 \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} = \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,2} \\
 \vdots &\vdots \\
 P_{0,0}^{k^i} + P_{1,0}^{k^i} + P_{2,0}^{k^i} + \dots + P_{i,0}^{k^i} + \dots &= k^i \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} = \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,i} \\
 \vdots &\vdots \\
 \vdots &\vdots
 \end{aligned}$$

Eszerint valamely t -időpontban transzverzálisan megfigyelt stabil népesség létszáma:

$$\begin{aligned}
 P_t &= P_{0,0} + P_{1,0}^k + P_{2,0}^{k^2} + \dots + P_{i,0}^{k^i} + \dots = \\
 &= P_{0,0} + \frac{P_{1,0}}{1+r} + \frac{P_{2,0}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_{i,0}}{(1+r)^i} + \dots
 \end{aligned}$$

Amennyiben a népesség stacionér, vagyis $k = 1$, illetve $r = 0$

$$P_t = P_{0,0} + P_{1,0} + P_{2,0} + \dots + P_{i,0} + \dots = \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0}.$$

A második megközelítés:

$$T_{0,0} \alpha_0 + T_{0,0} \alpha_1 + T_{0,0} \alpha_2 + \dots + T_{0,0} \alpha_i + \dots = T_{0,0}$$

$$T_{0,0}^k \alpha_0 + T_{0,0}^k \alpha_1 + T_{0,0}^k \alpha_2 + \dots + T_{0,0}^k \alpha_i + \dots = T_{0,0}^k = T_{0,1}$$

$$T_{0,0}^{k^2} \alpha_0 + T_{0,0}^{k^2} \alpha_1 + T_{0,0}^{k^2} \alpha_2 + \dots + T_{0,0}^{k^2} \alpha_i + \dots = T_{0,0}^{k^2} = T_{0,2}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$T_{0,0}^{k^i} \alpha_0 + T_{0,0}^{k^i} \alpha_1 + T_{0,0}^{k^i} \alpha_2 + \dots + T_{0,0}^{k^i} \alpha_i + \dots = T_{0,0}^{k^i} = T_{0,i}$$

$$\begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Eszerint a valamely t -időpontban transzverzálisan megfigyelt stabil népesség létszáma:

$$P_t = T_{0,0} \alpha_0 + T_{0,0}^k \alpha_1 + T_{0,0}^{k^2} \alpha_2 + \dots + T_{0,0}^{k^i} \alpha_i + \dots =$$

$$= T_{0,0} \alpha_0 + \frac{T_{0,0} \alpha_1}{1+r} + \frac{T_{0,0} \alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{T_{0,0} \alpha_i}{(1+r)^i} + \dots =$$

$$= T_{0,0} (\alpha_0 + k \alpha_1 + k^2 \alpha_2 + \dots + k^i \alpha_i + \dots) =$$

$$= T_{0,0} \left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{1+r} + \frac{\alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_i}{(1+r)^i} + \dots \right].$$

Amennyiben a népesség stacionér, vagyis $k = 1$, illetve $r = 0$

$$P_t = T_{0,0} \alpha_0 + T_{0,0} \alpha_1 + T_{0,0} \alpha_2 + \dots + T_{0,0} \alpha_i + \dots =$$

$$= T_{0,0} (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots) =$$

$$= T_{0,0}.$$

A harmadik megközelítés:

$$B_{0,0} r_0^p + B_{0,0} r_1^p + B_{0,0} r_2^p + \dots + B_{0,0} r_i^p + \dots = \sum_{x=0}^{\omega} B_{0,0} r_x^p$$

$$B_{0,0}^k r_0^p + B_{0,0}^k r_1^p + B_{0,0}^k r_2^p + \dots + B_{0,0}^k r_i^p + \dots = \sum_{x=0}^{\omega} B_{0,0}^k r_x^p =$$

[illegible]

$$\begin{aligned}
 P_t &= B_{o,o} r_o^p + B_{o,o} k r_1^p + B_{o,o} k^2 r_2^p + \dots + B_{o,o} k^i r_i^p + \dots \\
 &= B_{o,o} r_o^p + \frac{B_{o,o} r_1^p}{1+r} + \frac{B_{o,o} r_2^p}{(1+r)^2} + \dots + \frac{B_{o,o} r_i^p}{(1+r)^i} + \dots \\
 &= B_{o,o} \left(r_o^p + k r_1^p + k^2 r_2^p + \dots + k^i r_i^p + \dots \right) \\
 &= B_{o,o} \left(r_o^p + \frac{r_1^p}{1+r} + \frac{r_2^p}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_i^p}{(1+r)^i} + \dots \right) .
 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} P_t &= B_{o,o} r_o^p + B_{o,o} r_1^p + B_{o,o} r_2^p + \dots + B_{o,o} r_i^p + \dots = \\ &= B_{o,o} \left(r_o^p + r_1^p + r_2^p + \dots + r_i^p + \dots \right) = \\ &= B_{o,o} e_o^o. \end{aligned}$$
$$B_{0,0} e_o^0 \alpha_o + B_{0,0} e_o^0 \alpha_1 + B_{0,0} e_o^0 \alpha_2 + \dots + B_{0,0} e_o^0 \alpha_i + \dots = B_{0,0} e_o^0$$

$$B_{o,o} e_o^o \alpha_o + B_{o,o} e_o^o \alpha_1 + B_{o,o} e_o^o \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^o \alpha_i + \dots = B_{o,o} e_o^o = B_{o,1} e_o^o$$

$$B_{o,o} e_o^{o^2} \alpha_o + B_{o,o} e_o^{o^2} \alpha_1 + B_{o,o} e_o^{o^2} \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^{o^2} \alpha_i + \dots = B_{o,o} e_o^{o^2} =$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad = B_{o,2} e_o^o$$

$$B_{o,o} e_o^{o^i} \alpha_o + B_{o,o} e_o^{o^i} \alpha_1 + B_{o,o} e_o^{o^i} \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^{o^i} \alpha_i + \dots = B_{o,o} e_o^{o^i} =$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad = B_{o,i} e_o^o.$$

Eszerint a valamely t -időpontban transzverzálisan megfigyelt stabil népesség létszáma:

$$P_t = B_{o,o} e_o^o \alpha_o + B_{o,o} e_o^o \alpha_1 + B_{o,o} e_o^{o^2} \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^{o^i} \alpha_i + \dots =$$

$$= B_{o,o} e_o^o \alpha_o + \frac{B_{o,o} e_o^o \alpha_1}{1+r} + \frac{B_{o,o} e_o^o \alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{B_{o,o} e_o^o \alpha_i}{(1+r)^i} + \dots =$$

$$= B_{o,o} e_o^o \left(\alpha_o + k \alpha_1 + k^2 \alpha_2 + \dots + k^i \alpha_i + \dots \right) =$$

$$= B_{o,o} e_o^o \left(\alpha_o + \frac{\alpha_1}{1+r} + \frac{\alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_i}{(1+r)^i} + \dots \right).$$

Amennyiben a népesség stacionér, vagyis $k=1$, illetve $r=0$

$$P_t = B_{o,o} e_o^o \alpha_o + B_{o,o} e_o^o \alpha_1 + B_{o,o} e_o^o \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^o \alpha_i + \dots =$$

$$= B_{o,o} e_o^o \left(\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots \right) =$$

$$= B_{o,o} e_o^o.$$

Az ötödik megközelítés:

$$r_o^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$r_0^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$r_0^p k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots =$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad = \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}$$

$$r_0^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots =$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad = \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \cdot$$

Eszerint a valamely t-időpontban megfigyelt stabil népesség létszáma:

$$P_t = r_0^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots =$$

$$= r_0^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \frac{r_1^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{1+r} + \frac{r_2^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_i^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^i} + \dots =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \left(r_0^p + r_1^p k + r_2^p k^2 + \dots + r_i^p k^i + \dots \right) =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \left(r_0^p + \frac{r_1^p}{1+r} + \frac{r_2^p}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_i^p}{(1+r)^i} + \dots \right) \cdot$$

Amennyiben a népesség stacionér, vagyis $k=1$, illetve $r=0$

$$\begin{aligned}
P_t &= r_o^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \quad r_o^p + r_1^p + r_2^p + \dots + r_i^p + \dots = \\
&= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} .
\end{aligned}$$

A hatodik megközelítés:

$$\begin{aligned}
e_o^o \alpha_o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + e_o^o \alpha_i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_o^o \alpha_o^k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1^k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2^k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + e_o^o \alpha_i^k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
= e_o^o k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e_o^o \alpha_o^{k^2} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1^{k^2} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2^{k^2} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + e_o^o \alpha_i^{k^2} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
= e_o^o k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,2} \\
\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc}
e_o^o \alpha_o k^i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1 k^i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2 k^i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \dots + e_o^o \alpha_i k^i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\
\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots
\end{array}
= e_o^o k^i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} = e_o^o \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,i} .$$

Eszerint a valamely t-időpontban megfigyelt stabil népesség létszáma:

$$\begin{aligned}
P_t &= e_o^o \alpha_o \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1 k \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2 k^2 \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \dots + \\
&\qquad \qquad \qquad + \dots + e_o^o \alpha_i k^i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
&= e_o^o \alpha_o \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \frac{e_o^o \alpha_1 \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o}}{1+r} + \frac{e_o^o \alpha_2 \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^2} + \frac{e_o^o \alpha_i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^i} + \dots = \\
&= e_o^o \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} \left(\alpha_o + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \dots + \alpha_i k^i + \dots \right) = \\
&= e_o^o \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} \left(\alpha_o + \frac{\alpha_1}{(1+r)} + \frac{\alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_i}{(1+r)^i} + \dots \right) .
\end{aligned}$$

Amennyiben a népesség stacionér, vagyis $k=1$, illetve $r=0$

$$\begin{aligned}
P_t &= e_o^o \alpha_o \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1 \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2 \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \dots + \\
&\qquad \qquad \qquad = e_o^o \alpha_i \sum_{x=o}^{\omega} D_{x,o} + \dots =
\end{aligned}$$

$$= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \left(\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots \right) =$$

$$= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} .$$

A kérdés összes megközelítései alapján egyértelműen kitűnik, hogy amennyiben $k < 1$, illetve $r > 0$, vagyis a népesség stabil növekvő, a népesség korstruktúrája, a k hatványainak az életkor emelkedésével együttjáró növekedése és ez utóbbiak értékének ebből adódó csökkenése miatt fiatalabb lesz, ha viszont $k > 1$, illetve $r < 0$, vagyis a népesség stabil csökkenő, a népesség korstruktúrája a k hatványainak és ezek értékeinek az életkor emelkedésével együttjáró növekedése miatt öregebb lesz a népességet alkotó születési évjáratok népességeinek, illetve ez utóbbiak halandósági táblái és az ezekével azonos transzverzális halandósági tábla stacionér népességének a korösszetételénél. Valóban nem nehéz belátni például, hogy

$$\frac{P_{i,o} k^i}{P_{i-1,o} k^{i-1}} < \frac{P_{i,o}}{P_{i-1,o}}, \text{ illetve: } \frac{\frac{P_{i,o}}{(1+r)^i}}{\frac{P_{i-1,o}}{(1+r)^{i-1}}} < \frac{P_{i,o}}{P_{i-1,o}},$$

ha $k < 1$, illetve $r > 0$ és

$$\frac{P_{i,o} k^i}{P_{i-1,o} k^{i-1}} > \frac{P_{i,o}}{P_{i-1,o}}, \text{ illetve: } \frac{\frac{P_{i,o}}{(1+r)^i}}{\frac{P_{i-1,o}}{(1+r)^{i-1}}} > \frac{P_{i,o}}{P_{i-1,o}},$$

ha $k > 1$, illetve $r < 0$, továbbá, hogy

$$\frac{P_{i,o} k^i}{P_{i-1,o} k^{i-1}} = \frac{P_{i,o}}{P_{i-1,o}}, \text{ illetve } \frac{\frac{P_{i,o}}{(1+r)^i}}{\frac{P_{i-1,o}}{(1+r)^{i-1}}} = \frac{P_{i,o}}{P_{i-1,o}},$$

ha $k = 1$, illetve $r = 0$, vagyis ha a népesség stacionér.

A transzverzálisan megfigyelt stabil növekvő, illetve csökkenő népesség az azonos halandósági színvonalu stacionér népességéhez viszonyított korösszetételének fenti vázlatos áttekintése után vizsgáljuk meg, hogy miként alakul valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népességnek az azonos halandósági színvonalu stacionér népességéhez viszonyított átlagos életkora.

2. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkorának kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése

Hogyan számítható ki valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) ?

Mint ahogy a népességet alkotó egyes születési évjáratok halandósági táblái egymással is és a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség transzverzális halandósági tábláival is azonosak, a betöltött éveik száma alapján x éveseknek e halandósági táblákon belüli számát a születési évjáratot feltüntető alsó index elhagyásával egyszerűen L_x -szel jelölhetjük és a szóban forgó átlagos életkort ($\bar{a}$) az

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x (1+r)^{-x}}$$

formulával határozhatjuk meg.

A számlálóban szereplő

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x = 0,5 L_0 k^0 + 1,5 L_1 k + 2,5 L_2 k^2 + \dots =$$

$$\begin{aligned} &= 0,5 L_0 k^0 + \\ &+ 0,5 L_1 k + L_1 k + \\ &+ 0,5 L_2 k^2 + L_2 k^2 + L_2 k^2 \end{aligned}$$

Ez oszloponként
összeadva

$$\begin{aligned} &= 0,5 \sum_{x=0}^0 L_x k^x + \sum_{x=0}^1 L_x k^x + \sum_{x=0}^2 L_x k^x + \dots = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^0 L_x k^x + \sum_{x=0}^1 L_x k^x}{2} + \frac{\sum_{x=0}^1 L_x k^x + \sum_{x=0}^2 L_x k^x}{2} + \frac{\sum_{x=0}^2 L_x k^x + \sum_{x=0}^3 L_x k^x}{2} + \dots \end{aligned}$$

vagyis

$$\bar{a} = \frac{0,5 \sum_{x=0}^0 L_x k^x + \sum_{x=0}^1 L_x k^x + \sum_{x=0}^2 L_x k^x + \dots}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} =$$

$$= 0,5 + \frac{\sum_{x=\omega}^1 L_x k^x + \sum_{x=\omega}^2 L_x k^x + \dots}{\sum_{x=\omega}^0 L_x k^x}.$$

A $\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x$ kifejezés értéke, amennyiben benne a L_x szimbólumot a népesség

számát konkretizáló $P_{x,o}$ szimbólummal helyettesítjük, a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stabil népesség által már leélt évek számaként is felfogható (a $P_{x,o}$ szimbólum második alsó indexeként szereplő zérus - mint ismeretes - az e megfigyelési időpontot közvetlenül megelőző, vagyis a 0. születési évjáratból történő eredetre utal), a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkora ($\bar{a}$) tehát szintén felfogható a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt népesség által már leélt évek számának egy lakosra jutó hányadaként is:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}$$

Felfogható-e azonban ez az átlagos életkor a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt népesség által még leélendő évek számának egy lakosra jutó hányadaként is?

Stabil növekvő, illetve csökkenő népességben a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt népesség által még leélendő évek száma:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x &= e_o^{o'} P_{o,o} k^0 + e_1^{o'} P_{1,o} k^1 + e_2^{o'} P_{2,o} k^2 + \dots = \\ &= \frac{\sum_{k=\omega}^0 P_{x,o} + \sum_{x=\omega}^1 P_{x,o}}{2 P_{o,o}} P_{o,o} k^0 + \frac{\sum_{x=\omega}^1 P_{x,o} + \sum_{x=\omega}^2 P_{x,o}}{2 P_{1,o}} P_{1,o} k^1 + \\ &\quad + \frac{\sum_{x=\omega}^2 P_{x,o} + \sum_{x=\omega}^3 P_{x,o}}{2 P_{2,o}} P_{2,o} k^2 + \dots = \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=\omega}^0 P_{x,o} + \sum_{x=\omega}^1 P_{x,o}}{2} k^0 + \frac{\sum_{x=\omega}^1 P_{x,o} + \sum_{x=\omega}^2 P_{x,o}}{2} k +$$

$$+ \frac{\sum_{x=\omega}^2 P_{x,o} + \sum_{x=\omega}^3 P_{x,o}}{2} k^2 + \dots$$

Feltéve, hogy $P_{x,o} = L_x$, vagyis, hogy a 0. születési évjárat születéskori létszáma halandósági táblája gyökének értékével egyenlő ($B_{o,o} = 1_o$), írhatjuk:

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x = e_o^{o'} L_o k^0 + e_1^{o'} L_1 k + e_2^{o'} L_2 k^2 + \dots =$$

$$= \frac{\frac{T_o + T_1}{2}}{L_o} L_o k^0 + \frac{\frac{T_1 + T_2}{2}}{L_1} L_1 k + \frac{\frac{T_2 + T_3}{2}}{L_2} L_2 k^2 + \dots =$$

$$= \frac{T_o + T_1}{2} k^0 + \frac{T_1 + T_2}{2} k + \frac{T_2 + T_3}{2} k^2 + \dots =$$

$$= \frac{k^0}{2} T_o + \left(\frac{k^0 + k}{2}\right) T_1 + \left(\frac{k + k^2}{2}\right) T_2 + \left(\frac{k^2 + k^3}{2}\right) T_3 + \dots =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \frac{T_x + T_{x+1}}{2} k^x = 0,5 T_o + \sum_{x=0}^{\omega} \frac{k^{x-1} + k^x}{2} T_x.$$

Látható, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x,$$

illetve:

$$\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x,$$

következésképpen:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k_x},$$

illetve:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x},$$

vagyis a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkora nem egyenlő a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt népesség által még leélendő évek számának egy lakosra jutó hányadával is, mint ahogyan ez a zérus szaporodási rátája stabil népességre ($r = 0$; $k = 1$), vagyis a stacionér népességre vonatkozóan kimutatható volt. Ennélfogva ennek az átlagos életkornak a kétszerese stabil növekvő, illetve csökkenő népességben nem egyenlő a megfigyelt népesség átlagos halálozási korával sem ($2 \bar{a} \neq \bar{g}$, illetve $\bar{a} \neq 0,5 \bar{g}$), mint ahogyan az a stacionér népességre vonatkozóan kimutatható volt.

Miben különbözik egymástól stabil növekvő, illetve csökkenő népességben a már leélt évek számának egy lakosra jutó hányada a még leélendő évek számának egy lakosra jutó hányadától, vagyis a népesség átlagos életkora az egy lakosra jutó életpotenciáltól? Ennek tisztázásához a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt népesség által már leélt és az általa még leélendő évek számának a kapcsolatát kell feltárnunk.

A valamely tetszőleges időpontban megfigyelt népesség által még leélendő évek száma stabil növekvő, illetve csökkenő, valamint stacionér népességben egyaránt közelítő pontossággal a népesség által már leélt évek számának $(1+r)^{\bar{a}}$ - szorosát teszi ki. Stacionér népességben $r = 0$, ezért $(1+r)^{\bar{a}} = 1$, vagyis a még leélendő évek száma egyenlő a már leélt évek számával. Amennyiben viszont $r \neq 0$, $(1+r)^{\bar{a}} \neq 1$, hanem, az r előjelétől függően vagy nagyobb 1-nél, vagy kisebb 1-nél. Stabil növekvő népességben $r > 0$, vagyis $(1+r)^{\bar{a}} > 1$, a még leélendő évek száma tehát nagyobb a már leélt évek számánál. Stabil csökkenő népességben $r < 0$, vagyis $(1+r)^{\bar{a}} < 1$, a még leélendő évek száma tehát kisebb a már leélt évek számánál. Általánosságban véve megállapíthatjuk, hogy stabil népességben

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x \approx (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{k^{-\bar{a}}},$$

illetve:

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x \approx (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{k^{-\bar{a}}}$$

és

$$\sum_{x=0}^{\omega} x P_x k^x \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}}} = k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x,$$

illetve:

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{(1+r)^{\bar{a}}} = k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x.$$

Ebből adódóan a népesség által még leélendő évek számának egy lakosra jutó hányada közelítő pontossággal átlagos életkorának szintén $(1+r)^{\bar{a}}$ -szorosát teszi ki, vagyis:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x} \approx \bar{a} (1+r)^{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{k^{\bar{a}}},$$

illetve:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} \approx \bar{a} (1+r)^{\bar{a}} = \frac{\bar{a}}{k^{\bar{a}}}$$

és

$$\bar{a} \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x},$$

illetve:

$$\bar{a} \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{(1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x}.$$

Hogyan bizonyítható matematikailag, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x \approx (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{k^{\bar{a}}},$$

illetve, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{(1+r)^{\bar{a}}} = k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x ?$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x \approx (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{k^{\bar{a}}} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^{x-\bar{a}},$$

mert

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^{x-\bar{a}} &= 0,5 L_0 k^{-\bar{a}} + 1,5 L_1 k^{1-\bar{a}} + 2,5 L_2 k^{2-\bar{a}} + \dots = \\ &= 0,5 L_0 k^{-\bar{a}} + \\ &+ 0,5 L_1 k^{1-\bar{a}} + L_1 k^{1-\bar{a}} \\ &+ 0,5 L_2 k^{2-\bar{a}} + L_2 k^{2-\bar{a}} + L_2 k^{2-\bar{a}} \end{aligned}$$

Ez oszloponként
összeadva

$$\begin{aligned} &= 0,5 \sum_{x=\omega}^0 L_x k^{x-\bar{a}} + \sum_{x=\omega}^1 L_x k^{x-\bar{a}} + \sum_{x=\omega}^2 L_x k^{x-\bar{a}} + \dots = \\ &= \frac{0,5 \sum_{x=\omega}^0 L_x k^x}{k^{\bar{a}}} + \frac{\sum_{x=\omega}^1 L_x k^x}{k^{\bar{a}}} + \frac{\sum_{x=\omega}^2 L_x k^x}{k^{\bar{a}}} + \dots \approx \\ &\approx \frac{0,5 k^{\bar{a}} \sum_{x=\omega}^0 L_x}{k^{\bar{a}}} + \frac{0,5 (k^{\bar{a}} + k^{\bar{a}+1}) \sum_{x=\omega}^1 L_x}{k^{\bar{a}}} + \\ &+ \frac{0,5 (k^{1-\bar{a}} + k^{2-\bar{a}}) \sum_{x=\omega}^2 L_x}{k^{\bar{a}}} + \dots = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0,5 \sum_{x=\omega}^0 L_x + 0,5 (1+k) \sum_{x=\omega}^1 L_x + 0,5 (k+k^2) \sum_{x=\omega}^2 L_x + \dots = \\
&= 0,5 \sum_{x=\omega}^0 L_x + 0,5 \sum_{x=\omega}^1 L_x + 0,5 k \sum_{x=\omega}^1 L_x + 0,5 k \sum_{x=\omega}^2 L_x + \\
&\quad + 0,5 k^2 \sum_{x=\omega}^2 L_x + \dots = \\
&= \frac{T_0 + T_1}{2} k^0 + \frac{T_1 + T_2}{2} k + \frac{T_2 + T_3}{2} k^2 + \dots = \\
&= \frac{T_0 + T_1}{2} L_0 k^0 + \frac{T_1 + T_2}{2} L_1 k + \frac{T_2 + T_3}{2} L_2 k^2 + \dots = \\
&= e_0^{o'} L_0 k^0 + e_1^{o'} L_1 k + e_2^{o'} L_2 k^2 + \dots = \\
&\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) k^x = 0,5 T_0 + \sum_{x=\omega}^1 \left(\frac{k^{x-1} + k^x}{2} \right) T_x = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x,
\end{aligned}$$

következésképpen:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x &\approx \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^{x-\bar{a}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{k^{\bar{a}}} = \\
&= (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x.
\end{aligned}$$

Hasonló megfontolások alapján bizonyítható ez a közelítő pontosságu egyenlőség a

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \text{ megfelelő algebrai átalakításai útján is}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{(1+r)^{\bar{a}}} = k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^{x+\bar{a}},$$

mert

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^{x+\bar{a}} &= e_0^{o'} L_0 k^{\bar{a}} + e_1^{o'} L_1 k^{1+\bar{a}} + e_2^{o'} L_2 k^{2+\bar{a}} + \dots = \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2} L_0 k^{\bar{a}} + \frac{T_1 + T_2}{2} L_1 k^{1+\bar{a}} + \frac{T_2 + T_3}{2} L_2 k^{2+\bar{a}} + \dots = \\ &= \frac{T_0 + T_1}{2} k^{\bar{a}} + \frac{T_1 + T_2}{2} k^{1+\bar{a}} + \frac{T_2 + T_3}{2} k^{2+\bar{a}} + \dots = \\ &= \frac{T_0}{2} k^{\bar{a}} + \frac{T_1}{2} k^{\bar{a}} + \frac{T_1}{2} k^{1+\bar{a}} + \frac{T_2}{2} k^{1+\bar{a}} + \frac{T_2}{2} k^{2+\bar{a}} + \dots = \\ &= 0,5 k^{\bar{a}} \sum_{x=\omega}^0 L_x + 0,5 k^{\bar{a}} \sum_{x=\omega}^1 L_x + 0,5 k^{1+\bar{a}} \sum_{x=\omega}^1 L_x + \\ &\quad + 0,5 k^{1+\bar{a}} \sum_{x=\omega}^2 L_x + 0,5 k^{2+\bar{a}} \sum_{x=\omega}^2 L_x + \dots = \\ &= 0,5 k^{\bar{a}} \sum_{x=\omega}^0 L_x + 0,5 (k^{\bar{a}} + k^{1+\bar{a}}) \sum_{x=\omega}^1 L_x + 0,5 (k^{1+\bar{a}} + k^{2+\bar{a}}) \sum_{x=\omega}^2 L_x + \dots \approx \\ &\approx 0,5 \sum_{x=\omega}^0 L_x k^x + \sum_{x=\omega}^1 L_x k^x + \sum_{x=\omega}^2 L_x k^x + \dots = \\ &= \sum_{x=\omega}^0 x L_x k^x = \sum_{x=\omega}^0 x L_x (1+r)^{-x}. \end{aligned}$$

Bebizonyítottak tekinthető tehát, hogy:

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x \approx (1+a)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{k^{\bar{a}}} = \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^{x-\bar{a}},$$

illetve, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \approx \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x}{(1+r)^{\bar{a}}} = k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^{x+\bar{a}}.$$

Megállapítható az is, hogy a valamely tetszőleges időpontban megfigyelt stabil növekvő, illetve csökkenő népesség létszáma, illetve az általa a megfigyelés időpontját megelőző és követő két fél évből álló egy évnnyi időszak alatt leélt évek száma közelítő pontossággal a 0. születési évjárat által leélt évek számának

$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x$ -szeresét, illetve

$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x (1+r)^{-x}$ -szeresét teszi ki, vagyis:

$$P_t \approx \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x (1+r)^{-x} \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x T_{o,o} = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x (1+r)^{-x} T_{o,o} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} B_{o,o} r_x^p = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x (1+r)^{-x} \sum_{x=0}^{\omega} B_{o,o} r_x^p =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x B_{o,o} e_o^o = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha (1+r)^{-x} B_{o,o} e_o^o =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha (1+r)^{-x} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} =$$

$$= \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha (1+r)^{-x} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}.$$

Korábban ugyanis már bebizonyítottuk, hogy:

$$P_t = P_{o,o} + P_{1,o} k + P_{2,o} k^2 + \dots + P_{i,o} k^i + \dots =$$

$$= P_{o,o} + \frac{P_{1,o}}{1+r} + \frac{P_{2,o}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{P_{i,o}}{(1+r)^i} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= T_{o,o} \alpha_o + T_{o,o} k \alpha_1 + T_{o,o} k^2 \alpha_2 + \dots + T_{o,o} k^i \alpha_i + \dots = \\
&= T_{o,o} \alpha_o + \frac{T_{o,o} \alpha_1}{1+r} + \frac{T_{o,o} \alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{T_{o,o} \alpha_i}{(1+r)^i} + \dots = \\
&= T_{o,o} (\alpha_o + k \alpha_1 + k^2 \alpha_2 + \dots + k^i \alpha_i + \dots) = \\
&= T_{o,o} (\alpha_o + \frac{\alpha_1}{1+r} + \frac{\alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_i}{(1+r)^i} + \dots) = \\
&= B_{o,o} r_o^p + B_{o,o} k r_1^p + B_{o,o} k^2 r_2^p + \dots + B_{o,o} k^i r_i^p + \dots = \\
&= B_{o,o} r_o^p + \frac{B_{o,o} r_1^p}{1+r} + \frac{B_{o,o} r_2^p}{(1+r)^2} + \dots + \frac{B_{o,o} r_i^p}{(1+r)^i} + \dots = \\
&= B_{o,o} (r_o^p + k r_1^p + k^2 r_2^p + \dots + k^i r_i^p + \dots) = \\
&= B_{o,o} (r_o^p + \frac{r_1^p}{1+r} + \frac{r_2^p}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_i^p}{(1+r)^i} + \dots) = \\
&= B_{o,o} e_o^o \alpha_o + B_{o,o} e_o^o k \alpha_1 + B_{o,o} e_o^o k^2 \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^o k^i \alpha_i + \dots = \\
&= B_{o,o} e_o^o \alpha_o + \frac{B_{o,o} e_o^o \alpha_1}{1+r} + \frac{B_{o,o} e_o^o \alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{B_{o,o} e_o^o \alpha_i}{(1+r)^i} + \dots = \\
&= B_{o,o} e_o^o (\alpha_o + k \alpha_1 + k^2 \alpha_2 + \dots + k^i \alpha_i + \dots) = \\
&= B_{o,o} e_o^o (\alpha_o + \frac{\alpha_1}{1+r} + \frac{\alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_i}{(1+r)^i} + \dots) = \\
&= r_o^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + r_i^p k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
&= r_o^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \frac{r_1^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{1+r} + \frac{r_2^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_i^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^i} + \dots =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} (r_o^p + r_1^p k + r_2^p k^2 + \dots + r_i^p k^i + \dots) = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \left(r_o^p + \frac{r_1^p}{1+r} + \frac{r_2^p}{(1+r)^2} + \dots + \frac{r_i^p}{(1+r)^i} + \dots \right) = \\
&= e_o^o \alpha_o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1 k \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2 k^2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + \\
&\quad + e_o^o \alpha_i k^i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
&= e_o^o \alpha_o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \frac{e_o^o \alpha_1 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{1+r} + \frac{e_o^o \alpha_2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^2} + \dots + \\
&\quad + \frac{e_o^o \alpha_i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{(1+r)^i} + \dots = \\
&= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} (\alpha_o + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \dots + \alpha_i k^i + \dots) = \\
&= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \left(\alpha_o + \frac{\alpha_1}{1+r} + \frac{\alpha_2}{(1+r)^2} + \dots + \frac{\alpha_i}{(1+r)^i} + \dots \right) .
\end{aligned}$$

A 0. születési évjárat által leélt évek számának, illetve $B_{o,o}$ gyökű halandósági tábla stacionér népessége létszámának már bemutatott meghatározásai ugyanakkor:

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} &= P_{o,o} + P_{1,o} + P_{2,o} + \dots + P_{i,o} + \dots = \\
&= T_{o,o} = T_{o,o} \alpha_o + T_{o,o} \alpha_1 + T_{o,o} \alpha_2 + \dots + T_{o,o} \alpha_i + \dots = \\
&= T_{o,o} (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots) = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} B_{o,o} r_x^p = B_{o,o} r_o^p + B_{o,o} r_1^p + B_{o,o} r_2^p + \dots + B_{o,o} r_i^p + \dots = \\
&= B_{o,o} (r_o^p + r_1^p + r_2^p + \dots + r_i^p + \dots) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= B_{o,o} e_o^o = B_{o,o} e_o^o \alpha_o + B_{o,o} e_o^o \alpha_1 + B_{o,o} e_o^o \alpha_2 + \dots + B_{o,o} e_o^o \alpha_i + \dots = \\
&= B_{o,o} e_o^o (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots) = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = r_o^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_1^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + r_2^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + \\
&\quad + r_i^p \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} (r_o^p + r_1^p + r_2^p + \dots + r_i^p + \dots) = \\
&= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} = e_o^o \alpha_o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_1 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + e_o^o \alpha_2 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots + \\
&\quad + e_o^o \alpha_i \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} + \dots = \\
&= e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} (\alpha_o + \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i + \dots) .
\end{aligned}$$

A fentiek alapján egyértelműen kitűnik, hogy:

$$\begin{aligned}
\frac{P_t}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} &= \frac{P_t}{T_{o,o}} = \frac{P_t}{B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p} = \frac{P_t}{B_{o,o} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p} = \\
&= \frac{P_t}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{T_{o,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{B_{o,o} e_o^o} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{e_o^0 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}} = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x (1+r)^{-x},$$

vagyis, hogy

$$\begin{aligned} P_t &= \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} = T_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \\ &= B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = B_{o,o} e_o^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = e_o^0 \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x. \end{aligned}$$

Beláttuk azt is, hogy

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x &= \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^{x+\bar{a}} = (1+r)^{-\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x = \\ &= (1+r)^{-\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^{x-\bar{a}} = \\ &= k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x = k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^{x-\bar{a}} = \text{stb.}, \end{aligned}$$

ahol $\bar{a}$ természetesen a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkorát jelenti. A fentiek alapján ennek az átlagos életkornak számos, az eddigiektől eltérő meghatározása is adható, például:

$$\bar{a} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{T_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{B_{o,o} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} T_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} B_{o,o} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{T_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{B_{o,o} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} r_x^p \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
&= \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

A fentiekből is kitűnik, hogy:

$$\begin{aligned}
e_o^o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\bar{a} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\bar{a} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\bar{a} (1+r)^{\bar{a}} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\bar{a} (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
&= \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\bar{a} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\bar{a} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \text{stb.} \\
\bar{a} e_o^o &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{k^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \text{stb.} \\
\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x &= \bar{a} e_o^o B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \bar{a} e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \text{stb.} \\
\sum_{x=0}^{\omega} e_x^o P_{x,o} k^x &= \bar{a} e_o^o (1+r)^{\bar{a}} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \bar{a} e_o^o (1+r)^{\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \\
&= \bar{a} e_o^o k^{-\bar{a}} B_{o,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \bar{a} e_o^o k^{-\bar{a}} \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \text{stb.}
\end{aligned}$$

A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkora legegyszerűbben egyébként az

$$\bar{a} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x / \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \text{ formulával definiálható.}$$

Részint már kimutattuk, részint kimutatható, hogy

$$(1+r)^{\bar{a}} = k^{-\bar{a}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x} = \text{stb.}$$

$$(1+r)^{-\bar{a}} = k^{\bar{a}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) k^x} = \text{stb.}$$

$$\frac{1}{(1+r)^{\bar{a}}} = \frac{1}{k^{-\bar{a}}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right)} = \text{stb.}$$

$$(1+r)^{-\bar{a}} = k^{\bar{a}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{(T_x + T_{x+1})}{2} k^x} = \text{stb.}$$

Az $(1+r)$ kifejezés hatványkitevőjében szereplő $\bar{a}$ - mint jeleztük - egyenlő

$$\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \quad \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \text{ -szel. Az azonos halandósági színvonalu stacionér népesség}$$

átlagos életkora ugyanakkor legegyszerűbben a $\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x$ formulával lenne meghatározható.

Megjegyezzük, hogy az $(1+r)$ kifejezés különböző hatványait logaritmus segítségével célszerű kiszámítani. $(1+r)^{\bar{a}}$ kiszámításának szükségessége esetén például az $\bar{a} \log (1+r)$ kifejezés visszakeresése útján kapjuk meg a kívánt eredményt. Előfordulhat természetesen, hogy az $(1+r)^{\bar{a}}$ és az r ismeretében pl. az $\bar{a}$ értékét kell meghatároznunk. Ebben az esetben

$$\bar{a} = \frac{\log (1+r)^{\bar{a}}}{\log (1+r)} \text{ és } \frac{1}{\bar{a}} = \frac{\log (1+r)}{\log (1+r)^{\bar{a}}}.$$

Amennyiben az $\bar{a}$ és az $(1+r)^{\bar{a}}$ ismeretében az r nagyságát kell meghatároznunk, előbb a

$$\log (1+r) = \frac{\log (1+r)^{\bar{a}}}{\bar{a}}$$

kifejezés értékét célszerű kiszámítanunk; ez utóbbi visszakeresése útján az $(1+r)$ és ebből az r értéke könnyen kiszámítható.

Hasonló megfontolások alapján végezhetők el a szükségesnek bizonyuló számítások, ha az $(1+r)$ kifejezés hatványa nem $\bar{a}$, hanem $-\bar{a}$, $1/\bar{a}$, $-1/\bar{a}$ stb., annak ismeretében továbbá, hogy $k = 1/(1+r)$, a számítások a k tényező értékének az alapulvételével is elvégezhetők, illetve, amennyiben a k tényező értékét keressük, a szóban forgó összefüggések ismeretében ezt is könnyen meghatározhatjuk.

Miben különbözik egymástól a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkora ($\bar{a}_r \leq 0$) a népességet alkotó születési évjáratok (generációk) népességei, vagyis az azonos halandósági színvonalu stacionér népesség átlagos életkorától ($\bar{a}_{r=0}$ -tól)?

Kétségtelen, hogy:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_x}.$$

illetve:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x},$$

vagyis

$$\bar{a}_r \geq 1 \neq \bar{a}_{r=0}.$$

Eme egyenlőtlenség fennforgásának ténye még világosabbá válik, ha figyelembe

vesszük, hogy $\bar{a}_r \geq 0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}$ és $\bar{a}_{r=0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x}$, könnyen

belátható ugyanis, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} \neq \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x, \text{ ha csak a } k=1, \text{ illetve az } r=0, \text{ vagyis a stacionér népesség}$$

esete nem forog fenn.

Megállapítható tehát, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} k^x} = \frac{\bar{a}_r \geq 0}{\bar{a}_{r=0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}} =$$

$$= \frac{(1+r)^{-\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \frac{k^{-\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}},$$

vagyis

$$\frac{\bar{a}_r \geq 0}{\bar{a}_r = 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} \cdot \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} \cdot \frac{1}{(1+r)^{\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} \cdot \frac{1}{k^{-\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}, =$$

amiből kitűnik, hogy

$$\bar{a}_r \geq 0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\bar{a}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{(1+r)^{\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{k^{-\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{k^{-\bar{a}_r} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \text{stb.} \\
&= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x = \frac{\bar{a}_r \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x} = \\
&= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{a}_r \geqslant_0 (1+r) \bar{a}_r \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x} =$$

$$= \frac{(1+r) \bar{a}_r \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x} =$$

$$= \frac{\bar{a}_r \geqslant_0 k^{-\bar{a}} \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x} =$$

$$= \frac{k^{-\bar{a}} \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x} =$$

$$= \frac{\bar{a}_r \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = \frac{\bar{a}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} k^x}{\bar{a}_r \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}}$$

$$= \frac{\bar{a}_r \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x}{\bar{a}_r \geqslant_0 (1+r) \bar{a} \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{(1+r) \bar{a} \geqslant_0 \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0}}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \\
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{k^{-a} \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+r)^{\bar{a}} \geq 0 = k^{-\bar{a}} \geq 0 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \\
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+r)^{-\bar{a}} \geq 0 = k^{\bar{a}} \geq 0 &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x} = \\
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x} = \text{stb.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} k^x &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x} = \\
& \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x = \frac{\bar{a}_r \geq 0 \quad (1+r)^{-\bar{a}} \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\bar{a}_r = 0} =$$

$$= \frac{(1+r)^{-\bar{a}} \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x} =$$

$$= \frac{\bar{a}_r \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{\bar{a}_r = 0 \quad k^{\bar{a}} \geq 0} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o}}{k^{\bar{a}} \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,o} = \frac{\bar{a}_r = 0 \quad (1+r)^{-\bar{a}} \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\bar{a}_r \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} =$$

$$= \frac{(1+r)^{-\bar{a}} \geq 0 \quad \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x} =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\bar{a}_{r=0} k^{\bar{a}} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x}{\bar{a}_r \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \\
& = \frac{k^{\bar{a}} \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} P_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x} =
\end{aligned}$$

Visszatérve az $\bar{a}_r \geq 0 / \bar{a}_{r=0}$ hányadoshoz megállapíthatjuk, hogy ennek értéke csak akkor egységnyi, ha $\bar{a}_r \geq 0 = \bar{a}_{r=0}$, vagyis ha $k = 1$ -gyel, illetve $r = 0$ -val, azaz, ha a népesség stacionér. Ha $k < 1$, vagyis $r > 0$, akkor $\bar{a}_r \geq 0 < \bar{a}_{r=0}$ és

$$\frac{\bar{a}_r \geq 0}{\bar{a}_{r=0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} < 1.$$

Ha $k > 1$, vagyis $r < 0$, akkor $\bar{a}_r \geq 0 > \bar{a}_{r=0}$ és

$$\frac{\bar{a}_r \geq 0}{\bar{a}_{r=0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} > 1.$$

3. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség nyers születési és halálozási arányszámának kohorsz szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése

Miben különbözik egymástól valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népesség nyers születési arányszáma ($b_r \geq 0$) az e népességet alkotó születési évjáratok népességétől, vagyis az azonos halandósági színvonalú stacionér népességétől ($b_{r=0}$ -tól)?

Kétségtelen, hogy:

$$\frac{B_{0,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} k^x} \neq \frac{B_{0,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0}} = \frac{1}{e_o^{o'}}, \text{ illetve } \frac{l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} \neq$$

$$\neq \frac{l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{e_o^o},$$

vagyis $b_{r \geq 0} \neq b_{r=0}$.

$$\text{Mint hogy} \quad \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} k^x = P_t = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0},$$

illetve:

$$\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} L_x,$$

megállapítható, hogy:

$$b_{r \geq 0} = \frac{B_{0,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0}}, \text{ illetve } b_{r \geq 0} = \frac{l_o}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} L_x},$$

amiből kitűnik, hogy

$$b_{r \geq 0} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}, \quad b_{r=0} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} \cdot \frac{1}{e_o^o} = \frac{1}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}$$

és

$$b_{r=0} = b_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x.$$

Megállapítható az is, hogy stabil népességben $b = e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = 1$.

A fentiek alapján könnyen belátható, hogy

- ha $k < 1$, vagyis $r > 0$, akkor $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x < 1$ és $b_{r \geq 0} > b_{r=0}$,

- ha $k > 1$, vagyis $r < 0$, akkor $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x > 1$ és $b_{r \geq 0} < b_{r=0}$,

- ha $k = 1$, vagyis $r = 0$, akkor $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x = 1$ és $b_{r \geq 0} = b_{r=0}$.

Miben különbözik egymástól valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népesség nyers halálozási arányszáma ($d_{r \geq 0}$) és az e népességet alkotó generációk: vagyis az azonos halandósági színvonalú stacionér népesség nyers halálozási arányszáma ($d_{r=0}$)?

Kétségtelen, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} = \frac{1}{e_o^o}, \text{ illetve, } \frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{1}{e_o^o},$$

vagyis $d_r \geq_o \neq d_{r=0}$.

Minthogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o} k^x = P_t = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o},$$

$$\text{illetve a } \sum_{x=0}^{\omega} L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} L_x,$$

és kimutatható, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}, \text{ ahol } \alpha_{d,x} \text{ a halálozások stacionér}$$

népességen belüli kormegoszlását (naptárát) jelenti $\left(\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} = 1 \right)$.

Megállapítható tehát, hogy:

$$d_r \geq_o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} P_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = d_{r=0} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x},$$

illetve:

$$d_r \approx_o = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x \sum_{x=0}^{\omega} L_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{e_o^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = d_{r=0} \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x},$$

s ebből adódóan:

$$d_{r=0} = d_{r \geq 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}.$$

Ha $k < 1$, vagyis $r > 0$, akkor

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} > 1 \text{ és } d_{r \geq 0} < d_{r=0}$$

Ha $k > 1$, vagyis $r < 0$, akkor

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} < 1 \text{ és } d_{r \geq 0} > d_{r=0}.$$

Ha $k = 1$, vagyis $r = 0$, akkor

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = 1 \text{ és } d_{r \geq 0} = d_{r=0}.$$

A $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x$ kifejezés és a $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x$ kifejezés értéke stacionér népesség-

ben egyaránt 1-gyel egyenlő, ha tehát $k = 1$, vagyis $r = D$, akkor

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \frac{1}{1}$$

arány fennforgásáról van szó, aminek egyik következménye a nyers halálozási arányszámnak a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) reciprok értékével való azonosulása.

Fejtegetéseinkből kitűnt, hogy

$$b_{r \geq 0} = \frac{b_{r=0}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{1}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}$$

és

$$d_{r \geq 0} = \frac{d_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}.$$

Megállapítható tehát, hogy a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinszc arány-számát jelentő r -nek az értéke - többek között - az alábbi formulával is meghatározható:

$$r = b_{r=0} - d_{r=0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x} = \frac{1 - \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x}.$$

4. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség meghaltjai átlagos életkorának kohorsz szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése

Miben különbözik egymástól a stabil növekvő, illetve csökkenő népességben és az azonos halandósági színvonalu stacionér népességben valamely naptári időszak (pl. naptári év) alatt meghaltak átlagos életkora?

A mindkét esetben azonos korszpecifikus halálozási arányszámokat m_x -szel jelölve kétséget kizáróan megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} m_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} m_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} m_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} m_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,0}} = e_0^0,$$

illetve:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x m_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x m_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x m_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x m_x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = e_0^0.$$

Mínthogy $P_{x,0} m_x = D_{x,0}$ és $e_0^0 = \sum_{x=0}^{\omega} d_x \alpha_{d,x}$ a fenti egyenlőtlenség a

következő formában is írható:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_{x,o} k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} ,$$

illetve:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x d_x}{\sum_{x=0}^{\omega} d_x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} .$$

Eme egyenlőség fennforgásának ténye még világosabbá válik, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} k^x} = \bar{d}_{r \geq 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}$$

és a

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}} = \bar{d}_{r=0} = e_o^o = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} \neq \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} , \text{ hacsak a } k=1, \text{ illetve az } r=0,$$

vagyis a stacionér népesség esete nem forog fenn,

$$\frac{\bar{d}_{r \geq 0}}{\bar{d}_{r=0}} = \frac{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x}} = \frac{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} k^x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}} =$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x \sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} D_{x,o} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}$$

és

$$\frac{\bar{d}_{r=0}}{\bar{d}_{r \geq 0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x},$$

amiből kitűnik, hogy

$$\bar{d}_{r \geq 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \frac{\bar{d}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}} =$$

$$\frac{\bar{d}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \text{stb.}$$

$$\bar{d}_{r=0} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} = \frac{\bar{d}_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x} =$$

$$= \frac{\bar{d}_r \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} =$$

= stb.

$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x = \frac{\bar{d}_r = 0 \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\bar{d}_r \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x = \frac{\bar{d}_r \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\bar{d}_r = 0} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x}} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} = \frac{\bar{d}_r = 0 \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\bar{d}_r \geq 0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} x D_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x} = \text{stb.}$$

Visszatérve a $\bar{d}_r \geq 0 / \bar{d}_{r=0}$ hányadoshoz megállapíthatjuk, hogy ennek értéke csak akkor egységnyi, ha $\bar{d}_r \geq 0 = \bar{d}_{r=0}$ -val, vagyis ha $k=1$ -gyel, illetve $r=0$ -val, azaz ha a népesség stacionér. Ha $k < 1$, vagyis $r > 0$, akkor általában $\bar{d}_r \geq 0 < \bar{d}_{r=0}$ és

$$\frac{\bar{d}_r \geq 0}{\bar{d}_r = 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} (1+r)^{-x}} < 1.$$

Ezzel összhangban ha $k > 1$, vagyis $r < 0$, akkor általában $\bar{d}_r \geq 0 > \bar{a}_{r=0}$ és:

$$\frac{\bar{d}_r \geq 0}{\bar{d}_r = 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,x} (1+r)^{-x}} > 1.$$

5. A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség gyermekei megszületésekor átlagos életkorának kohorsz-szemlélet alapján történő meghatározása és elemzése

Miben különbözik egymástól a nők (illetve a férfiak) átlagos életkora gyermekeik megszületésekor valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népességben és az ez utóbbit alkotó születési évjáratokban?

A korszpecifikus termékenységi arányszámot f_x - szel jelölve megállapíthatjuk, hogy:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} f_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} f_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x P_{x,0} f_x}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{x,0} f_x} = T,$$

illetve:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x f_x k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x f_x k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x L_x f_x}{\sum_{x=0}^{\omega} L_x f_x} = T.$$

Minthogy $P_{x,0} f_x = F_{x,0}$ és $T = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}$, ahol $\alpha_{f,x}$ az élveszületések

születési évjáraton belüli kor szerinti megoszlását (naptárát) jelenti ($\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} = 1$), a fenti egyenlőtlenség a következő formában is írható:

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o} k^x} \neq \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o}} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}.$$

A fenti egyenlőtlenség fennforgásának ténye még világosabbá válik, ha figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o} k^x} = \bar{f}_r \geq 0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x}$$

és

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o}} = \bar{f}_{r=0} = T = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}$$

$$\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x} \neq \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}, \text{ hacsak a népesség nem stacionér,}$$

vagyis hacsak a $k = 1$, illetve az $r = 0$ esete nem forog fenn.

Minthogy $\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o}$, megállapíthatjuk, hogy

$$\frac{\bar{f}_r \geq 0}{\bar{f}_{r=0}} = \frac{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x}}{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}}} = \frac{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,o} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o} k^x}}{\frac{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,o}}{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,o}}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} F_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} F_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}}$$

és

$$\frac{\bar{f}_{r=0}}{\bar{f}_{r \geq 0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x},$$

amiből kitűnik, hogy

$$\begin{aligned} \bar{f}_{r \geq 0} &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x} = \frac{\bar{f}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}} = \\ &= \frac{\bar{f}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x} = \text{stb.} \\ \bar{f}_{r=0} &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} = \frac{\bar{f}_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} F_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\bar{f}_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x = \frac{\bar{f}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x}{\bar{f}_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x = \frac{\bar{f}_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} F_{x,0}}{\bar{f}_{r=0}} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0}}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x}} = \text{stb.}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} = \frac{\bar{f}_{r=0} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x}{\bar{f}_{r \geq 0} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f,x} k^x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} \sum_{x=0}^{\omega} x F_{x,0} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f,x} k^x} = \text{stb.}$$

Visszatérve az $\bar{f}_{r \geq 0} / \bar{f}_{r=0}$ hányadoshoz megállapíthatjuk, hogy ennek értéke csak akkor egységnyi, ha $\bar{f}_{r \geq 0} = \bar{f}_{r=0}$ -val, vagyis ha $k=1$ -gyel, illetve $r=0$ -val, azaz, ha a népesség stacionér. Ha $k < 1$, vagyis $r > 0$, illetve ha $k > 1$, vagyis $r < 0$, akkor $\bar{f}_{r \geq 0}$ a termékenység korszpecifikus arányszámainak az alakulásától függően lehet nagyobb, illetve kisebb $\bar{f}_{r=0}$ -nál.

Hangsúlyozni kívánjuk, hogy fejtegetéseink nem a szülők gyermekeik megszületésekor, valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népességben megfigyelhető átlagos életkorának és az azonos halandósági színvonalu stacionér népességben megfigyelhető eme életkornak az egybevetésére vonatkoznak. A valamely azonos halandósági színvonalu stacionér népességben a korszpecifikus termékenységi arányszámokat szimbolizáló f_x értékeknek akkoráknak kellene lenniök, hogy biztosítsák a nettó reprodukciós együttható (R_0) egységnyi értékét, il-

letve az intrinsic szaporodási arány (r) 0-val egyenlő nagyságai nem lehetnének tehát azonosak a valamely azonos halandósági színvonalu stabil növekvő, illetve csökkenő népességben megfigyelhető korszpecifikus termékenységi arányszámokkal és megfordítva: a nettó reprodukciós együttható (R_0) valamely egységnyitől eltérő értékét, illetve az intrinsic szaporodási arány (r) valamely 0-tól eltérő nagyságát biztosító korszpecifikus termékenységi arányszámok nem lehetnének azonosak a valamely azonos halandósági színvonalu stacionér népesség korszpecifikus termékenységi arányszámaival. Fejtegetésünk során ezeket az arányszámokat azonosaknak vettük, mert csupán valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népesség és az ez utóbbit alkotó születési évjáratok népességei korösszetétel-különbségének a szülők gyermekeik megszületésekor átlagos életkorára gyakorolt hatását vizsgáltuk.

6. A bemutatott összefüggések kibővítésének lehetősége a leélt évek, illetve a népmozgalmi események "transzverzális naptárának" a bevezetése által

A fentiekben vázolt összefüggések körének jelentős kibővítése érhető el a leélt évek száma, illetve különféle népmozgalmi események (élveszületések, halálozások) száma transzverzálisan megfigyelhető életkor szerinti megoszlásának, más szavakkal: transzverzális naptárának a bevezetése által. Az eddigiek során naptáron kizárólag az egyes kohorszokban megfigyelhető, vagyis longitudinális naptárt értettünk, minthogy a naptár fogalma általában ezt is jelenti. A továbbiak során e longitudinális naptárnak az elemeit, a leélt évek számára vonatkozóan, jelöljük a korábbi α_x helyett $\alpha_{r=0,x}$ -szel, a leélt évek száma transzverzális kormegoszlásának az elemeit pedig $\alpha_{r \geq 0,x}$ -szel, mely utóbbi csak abban az esetben azonosul az előbbivel, ha a népesség stacionér, vagyis ha $r = 0$, illetve $k = 1$ stb.

Tételezzük fel, hogy a leélt évek számának transzverzális naptárát módunkban áll közvetlen megfigyelésen alapuló direkt számítás útján előállítani, úgy, hogy a különböző korúak évközepi számát, illetve a különböző életkorokhoz tartozás állapotában leélt évek évi számát osztjuk a népesség évközepi számával, illetve a népesség által összesen leélt évek évi számával. Az ily módon nyert transzverzális naptár elemeinek az összege szintén egyenlő lesz eggyel. A transzverzális naptár elemei azonban a longitudinális naptár elemeiből is előállíthatók az

$$\frac{\alpha_{r=0,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x}$$

hányadosok kiszámítása útján. E hányadosok kiszámítása mindig elkerülhetetlen, ha csak a

népesség nem stacionér, mert ezt az egy esetet kivéve a $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x$ összeg (melyet korábban egyszerűen $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_x k^x$ -szel jelöltünk), mindig nagyobb egynél, vagy kisebb egy-

nél, strukturája azonban mindig azonos a népesség, illetve a leélt évek száma transzverzálisan megfigyelhető strukturájával. A longitudinális naptár elemei szintén előállíthatók a transzverzális naptár elemeiből az $\frac{\alpha_{r \geq 0, x}}{k^x}$ hányadosok, majd az

$$\frac{\frac{\alpha_{r \geq 0, x}}{k^x}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{r \geq 0, x}}{k^x}}$$

hányadosok kiszámítása után. E hányadosok kiszámítása szintén mindig elkerülhetetlen, ha csak a népesség nem stacionér, mert ezt az egy esetet kivéve a

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{r \geq 0, x}}{k^x}$$

összeg szintén mindig nagyobb egynél, vagy kisebb egynél, strukturája azonban mindig azonos a népesség, illetve a leélt évek száma longitudinális strukturájával (naptárával).

Kimutatható, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{r \geq 0, x}}{k^x} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x},$$

vagyis

$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{r \geq 0, x}}{k^x}}.$$

Hasonló megfontolások alapján számíthatók ki a halálozások transzverzális naptárának elemei longitudinális naptárak elemeiből az

$$\frac{\alpha_{d, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}$$

hányadosok kiszámítása után és longitudinális naptárunk elemei transzverzális naptárunk elemeiből az $\frac{\alpha_{d, r \geq 0, x}}{k^x}$ hányadosok, majd az

$$\frac{\frac{\alpha_{d, r \geq 0, x}}{k^x}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{d, r \geq 0, x}}{k^x}}$$

hányadosok kiszámítása után. Ebben az esetben is kimutatható továbbá, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{d, r \geq 0, x}}{k^x} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x},$$

illetve, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{d, r \geq 0, x}}{k^x}}.$$

Az elveszületések transzverzális naptárának elemei longitudinális naptárak elemeiből a fentiekkel analóg módon az

$$\frac{\alpha_{f, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x}$$

hányadosok kiszámítása után, longitudinális naptárának elemei transzverzális naptárának elemeiből pedig az $\alpha_{f, r \geq 0, x} / k^x$ hányadosok, majd az

$$\frac{\frac{\alpha_{f, r \geq 0, x}}{k^x}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{f, r \geq 0, x}}{k^x}}$$

hányadosok kiszámítása után becsülhetők és természetesen

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{f, r \geq 0, x}}{k^x} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x},$$

illetve:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{\alpha_{f, r \geq 0, x}}{k^x}}.$$

Hogyan vázolható a kifejezettek figyelembevételével az $\bar{a}_{r \geq 0}$ és az $\bar{a}_{r=0}$ mutatók közötti kapcsolat?

A transzverzálisan megfigyelt stabil növekvő, illetve csökkenő népesség átlagos életkora, a fentiek értelmében az

$$\bar{a}_{r \geq 0} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \geq 0, x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x}.$$

formulákkal is becsülhető. Az ezen átlagos életkor kiszámítása során használt átlagolandó értékekből az egyes kohorszokban, vagyis longitudinális aspektusban az átlagos életkort az

$$\frac{x \alpha_{r \geq 0, x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x}{k^x} = x \alpha_{r=0, x}$$

hányadosok képzése és összegezése útján számíthatjuk ki:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{r=0} &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r=0, x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{x \alpha_{r \geq 0, x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x}{k^x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \geq 0, x} k^{-x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \geq 0, x} (1+r)^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} (1+r)^{-x}. \end{aligned}$$

A longitudinális aspektusban becsült átlagos életkor kiszámítása során használt átlagolandó értékekből a transzverzálisan megfigyelt stabil népesség átlagos életkorát pedig az

$$\frac{x \alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = x \alpha_{r \geq 0, x}$$

hányadosok képzése és összegezése útján becsülhetjük, mint már jeleztük:

$$\begin{aligned} \bar{a}_{r \geq 0} &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \geq 0, x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{x \alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} + \end{aligned}$$

A meghaltak transzverzálisan megfigyelhető átlagos életkora hasonlóképpen a

$$\bar{d}_{r \geq 0} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r \geq 0, x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}.$$

formulákkal is becsülhető. Az ezen átlagos életkor kiszámítása során használt átlagolandó értékekből a meghaltak átlagos életkora a népességet alkotó egyes születési évjáratokban (generációkban) az

$$\frac{x \alpha_{d, r \geq 0, x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{k^x} = x \alpha_{d, r=0, x}$$

hányadosok képzése és összegezése útján állítható elő:

$$\begin{aligned} \bar{d}_{r=0} &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r=0, x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{x \alpha_{d, r \geq 0, x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{k^x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r \geq 0, x} k^{-x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r \geq 0, x} (1+r)^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} (1+r)^{-x}. \end{aligned}$$

A meghaltak longitudinális aspektusban becsült átlagos életkorának a kiszámítása során használt átlagolandó értékekből transzverzálisan megfigyelhető átlagos életkoruk az

$$\frac{x \alpha_{d, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x} = x \alpha_{d, r \geq 0, x}$$

hányadosok képzése és összegezése útján becsülhető, ugyanis, mint már jeleztük:

$$\bar{d}_{r \geq 0} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r \geq 0, x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{x \alpha_{d, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x} =$$

$$= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{d, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}.$$

A szülők gyermekeik megszületésekor transzverzálisan megfigyelhető átlagos életkora a fentiekkel analóg módon az

$$\bar{f}_{r \geq 0} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r \geq 0, x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x}$$

formulával is kiszámítható. Az ezen átlagos életkor kiszámítása során használt átlagolandó értékekből a szülők gyermekeik megszületésekor átlagos életkora a népességet alkotó egyes születési évjáratokban (generációkban) az

$$\frac{x \alpha_{f, r \geq 0, x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x}{k^x} = x \alpha_{f, r=0, x}$$

hányadosok képzése és összegezése útján becsülhető:

$$\begin{aligned} \bar{f}_{r=0} &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r=0, x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{x \alpha_{f, r \geq 0, x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x}{k^x} = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r \geq 0, x} k^{-x} \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x = \\ &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r \geq 0, x} (1+r)^x \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} (1+r)^{-x}. \end{aligned}$$

A longitudinális aspektusban becsült átlagos életkornak a kiszámítása során használt átlagolandó értékekből ezen átlagos életkor transzverzálisan megfigyelhető változata az

$$\frac{x \alpha_{f, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x} = x \alpha_{f, r \geq 0, x}$$

hányadosok képzése és összegezése útján állítható elő, ugyanis, mint már szintén jeleztük

$$\begin{aligned} \bar{f}_{r \geq 0} &= \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r \geq 0, x} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{x \alpha_{f, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x} = \\ &= \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{f, r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{f, r=0, x} k^x} . \end{aligned}$$

A fentiekben bevezetett jelöléseket alkalmazva írhatjuk, hogy az intrinsic szaporodási arány (r) - többek között - az

$$\begin{aligned} r = b_{r \geq 0} - d_{r \geq 0} &= \frac{b_{r=0}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} - \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = \\ &= \frac{1}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} - \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = \\ &= \frac{1 - \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} \end{aligned}$$

formulával is meghatározható, pontosabban az r értékének a fenti egyenlőségében foglalt feltételeknek is eleget kell tennie (az egyenlőség bal oldalán szereplő k^x tényező ismerete ugyanis az r értékének az ismeretét már feltételezi).

Ennek alapján

$$e_0^0 = \frac{1 - \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{r \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} ,$$

vagyis ismert szaporodási rátájú stabil növekvő, illetve csökkenő népességben a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) értéke a népesség és a halálozások tényleges kormegoszlásának ismeretében a fenti formula segítségével is meghatározható.

7. A bemutatott összefüggések alkalmazásának feltételei és módszere temetőfeltárások eredményei alapján végzett népességrekonstrukciók során

A temetőfeltárások eredményei alapján végzett paleodemográfiai népességrekonstrukciók során célszerűnek tűnhetik a különféle népességi modellek, pontosabban: az un. modell-népességek (a stabil növekvő, illetve a stabil csökkenő, a stacionér, a kvázi-stabil és a félig stabil népességek) tulajdonságai közötti összefüggések (kapcsolatok) alkalmazása. Ez utóbbi, matematikailag is definiálható kapcsolatok valóban alkalmasak arra, hogy amennyiben a népességi modellek a népességrekonstrukció céljára való alkalmazásának a feltételei valóban adóttak, a vizsgált népesség temetőfeltárások eredményei alapján megismert demográfiai jellemzőiből ismeretlen demográfiai jellemzőire vonatkozóan is következtetéseket vonjunk le. Kérdés azonban, hogy a temetőfeltárások eredményei valóban minden esetben lehetővé teszik-e valamely népességi modellnek a népességrekonstrukció céljaira való alkalmazását. Hogyan lehet eldönteni, hogy lehetővé teszik-e vagy sem, és ha lehetővé teszik, akkor milyen népességi modellét (illetve modell-népességét)?

Egyáltalában milyen adatokat (információkat) szolgáltathatnak a temetőfeltárások a népesség demográfiai jellemzőinek a megismeréséhez?

Tételezzük fel, hogy a feltárt temető csontvázletelei alapján sikerült megállapítanunk a meghaltak (eltemetettek) nemét és életkorát. Ezeknek az adatoknak a birtokában viszonylag könnyen kiszámítható a meghalt férfiak és nők halálozásuk kora szerinti megoszlása, átlagos elhalálozási kora, valamint az összes meghaltak és a különböző koru meghaltak nemek szerinti megoszlása.

Megállapíthatjuk, hogy kizárólag ezeknek az adatoknak a birtokában tulajdonképpen még semmiféle népességrekonstrukció nem végezhető; a meghalt férfiak és nők átlagos elhalálozási kora nem minden esetben azonosítható ugyanis születéskor várható átlagos élettartamukkal, sőt kizárólag a szóban forgó adatok birtokában, az sem lehetséges, hogy az átlagos elhalálozási korra vonatkozó becslési eredmények birtokában ez utóbbit valamilyen módon kiszámítsuk. A meghalt férfiak és nők nemek és életkor szerinti megoszlása azonban alapul szolgálhat például annak az eldöntéséhez, hogy az a népesség, mely az adott temetőbe temetkezett, a külső vándorlásokkal szemben zárt vagy nyitott népesség volt-e. Előfordulhat, hogy a szóban forgó megoszlások olyan "szabálytalanságokat", "aránytalanosságokat" mutatnak, melyek eleve kizárják, hogy az adott temetőt valamilyen külső vándorlásokkal szemben zárt népesség temetőjének tekintsük és ez utóbbi demográfiai jellemzőinek a rekonstrukcióját célul tűzzük ki.

Tételezzük fel azonban, hogy a szóban forgó népesség a külső vándorlásokkal szemben zártnak tekinthető s hogy sikerült megállapítanunk a meghaltak (eltemetettek) elhalálozásának (eltemetésének) az időpontját is és ezeknek az adatoknak a birtokában módunkban áll képet alkotnunk a halálozások az egymást követő azonos nagyságú (pl. naptári évnvi, öt naptári évnvi, tíz naptári évnvi stb.) időszakok alatti számának az alakulásáról is.

A fentiekben vázolt feltételek egyidejű teljesülése esetén már lehetséges és csak e feltételek egyidejű teljesülése esetén lehetséges annak az eldöntése, hogy a temetőfeltárások eredményei alapján végezhető-e egyáltalában valamilyen népességrekonstrukció, s hogy ez utóbbira a különféle népesség modellek felhasználhatók-e vagy sem.

Milyen népességi modellek felhasználásáról lehet egyáltalában szó?

Legtöbbször az un. malthusiánus/geometriai haladvány szerint növekvő (illetve csökkenő) népességek, ezek közül is az un. stabil népességek, a stabil népességek közül pedig az un. stacionér népesség modellje alkalmazása tűnik kézenfekvőnek, ezért elsősorban a stabil (és a stacionér) népesség tulajdonságaira, e tulajdonságok interdependenciájára és a szóban forgó modell-népességek népességrekonstrukció céljaira való alkalmazási feltételeire és módjaira célszerű paleodemográfiai népességrekonstrukciók céljából figyelmünket összpontosítanunk.

Paleodemográfiai népességrekonstrukciók során gyakran fordul elő, hogy a kutatók e célra a stacionér népesség modelljét alkalmazzák. E rekonstrukciókat végezve gyakran követik el azt a hibát, hogy azt a népességet, melynek a még ismeretlen demográfiai jellemzőit a már ismert demográfiai jellemzői alapján kívánják megállapítani (rekonstruálni), anélkül tekintik stacionérnak, hogy stacionér, illetve legalább közelítőleg stacionér jellegéről minden kétséget kizáróan megbizonyosodnának. A népesség ismert jellemzőire vonatkozó információkat ezekben az esetekben is leggyakrabban kizárólag a temetőfeltárások eredményei szolgáltatják; általában úgy tűnik, hogy a paleodemográfiai kutatásokban ez a leggyakoribb. Amennyiben a csontvázletek alapján sikerült közelítő pontossággal megállapítani az elhunytak nemét és életkorát, valamint elhalálozásuk (temetésük) időpontját, célszerű - mint jeleztük - a halálozások az egymást követő azonos nagyságu (pl. naptári évnvi, öt naptári évnvi, tíz naptári évnvi stb.) periódusokra jutó számának és az egymást követő azonos nagyságu (azonos számú évet felölelő) periódusok alatt meghalt (eltemetett) férfiak és nők átlagos életkorának a megállapítása. Ez utóbbi legegyszerűbben a halálozások a különböző korévek (korcsoportok) szerinti százalékos megoszlásának az adataiból kiindulva történhetik.* Amennyiben az egymást követő azonos hosszúságu periódusok alatt meghaltaknak (eltemetetteknek) sem a száma, sem nemek és életkor szerinti megoszlása, vagyis átlagos életkora nem tér el számottevően egymástól, nem tekinthető kizártnak, hogy a népesség, mely az adott temetőbe temetkezett, stacionér, illetve közelítőleg stacionér volt, ha pedig

* Ezzel a módszerrel - mint ismeretes - első ízben Edmund Halley angol asztronómus állított össze és tett közzé An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind (In: Philosophical Transactions of the Royal Society, Vol. 17, 1693) címmel halandósági táblát a Breslauban az 1687-1691. évek alatt elhunytakra vonatkozó feljegyzések alapján, ezért Halley-féle módszernek nevezik. Halley tudatában volt annak, hogy módszere csak a vázolt feltételek teljesülése esetében alkalmazható; a paleodemográfiai és történeti demográfiai halandósági vizsgálatok során azonban igen gyakran alkalmazzák Halley módszerét anélkül, hogy alkalmazhatóságának alapvető feltételéről, vagyis a vonatkozó népesség stacionér jellegéről minden kétséget kizáróan meggyőződnenek. A nem stacionér népességek halálozási adatai alapján Halley módszerével összeállított halandósági tábláknak természetesen nincsen tudományos értékük.

a népesség legalább közelítőleg stacionér volt, a meghaltaknak az egymást követő azonos nagyságu időszakok alatti száma az elveszületéseknek a vonatkozó időszakok alatti számával, az egymást követő azonos nagyságu időszakok alatt meghaltak időben változatlan átlagos életkora pedig a születéskor várható átlagos élettartammal (e_0^0) vehető egyenlőnek. Ebben az esetben a népesség összlétszáma (P) a halálozások (temetkezések) egy év alatti számának (D) és a meghaltak átlagos életkorának (e_0^0) szorzataként is meghatározható:

$$P = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x} = e_0^0 \sum_{x=0}^{\omega} D_x = D e_0^0 = B e_0^0.$$

A népesség számának a megállapítását természetesen előbb nemenként külön-külön célszerű elvégezni, majd az így kapott eredményeket összegezni, előállítható azonban úgy is, hogy előbb a mindkét nembeli népesség születéskor várható átlagos élettartamát számítjuk ki (a nemenkénti átlagos élettartamértékeknek a nemek születéskori arányaival történő összesúlyozása útján) és ez utóbbi adatot szorozzuk a mindkét nembeli meghaltak (eltemetettek) évi számával, mely utóbbi - mint jeleztük - stacionér népességben egyenlő az elveszületések évi számával. A fenti egyenlőségsorozatban egyébként a még nem ismertített szimbólumok közül D_x a betöltött éveik száma alapján x -éves korukban meghaltak számát, B pedig az elveszületések évi számát jelenti.

A stacionér népesség kormegoszlása a halálozások életkor szerinti százalékos megoszlásának az adataiból számított halandósági tábla stacionér népességének kormegoszlásával, nyers születési és halálozási arányszáma pedig a meghaltak átlagos életkorának (e_0^0) a reciprokkal ($1/e_0^0$) tekinthető közelítőleg egyenlőnek stb. Amennyiben a népesség, mely az adott temetőbe temetkezett, nem tekinthető stacionérnak, illetve legalább közelítőleg stacionérnak, a meghaltak átlagos életkora - mint jeleztük - nem egyenlő a születéskor várható átlagos élettartammal, a halálozások valamely időszak alatti száma nem egyenlő az elveszületések azonos időszak alatti számával stb., vagyis a stacionér népesség különböző tulajdonságainak interdependenciájából kiindulva a népesség ismert jellemzőiből az ismeretlenek nem határozhatók meg.

Helytelen tehát az az eléggé elterjedt gyakorlat, hogy a meghalt férfiak és a nők, illetve a mindkét nembeli népesség paleodemográfiai temetőfeltárások eredményei alapján megállapított átlagos életkorát a halandósági táblák a születéskor várható átlagos élettartamra vonatkozó mutatójának az értékeivel vetik egybe, mely utóbbi természetesen azonos a halandósági táblabeli meghaltak átlagos életkorával, a ténylegesen meghaltak átlagos életkorával viszont - mint jeleztük - csak abban az esetben azonos, ha a népesség, mely a feltárt temetőbe temetkezett, stacionér volt.

Ez utóbbinak - mint ismeretes - nem minden kétséget kizáróan elegendő kritériuma a meghaltak átlagos életkorának az időbeli változatlanlansága, ez utóbbi ugyanis az un. stabil növekvő, ill. csökkenő népességben is változatlan, stacionér népességben ugyanis nemcsak a meghaltak kormegoszlása változatlan időben, hanem a különböző életkorokban meghaltaknak az abszolút száma is.

Hogyan járjunk el, ha a halálozások évi száma növekedési, illetve csökkenési ütemének a birtokában a feltárt temetőbe temetkező népességet stabil növekvő, illetve stabil csökkenő népességnek tekinthetjük.

A stabil növekvő, illetve csökkenő népességben - mint ismeretes - a halálozások száma évről évre a természetes szaporodás intrinsic arányszáma (r) által jelzett irányban és arányban változik. A r értékét tehát valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népességben az egymást követő naptári évek alatt elhunytak (eltemetettek) számai birtokában is kiszámíthatjuk. E számoknak természetesen stabil növekvő, illetve csökkenő népességben elegendően hosszú időn át mértani haladvány szerint kell növekedniök, vagy csökkenniök.* Valamely stabil növekvő, illetve csökkenő népességben a valamely naptári év alatt az egyes korévekben (korcsoportokban) előforduló halálozások száma az

$$P_x \frac{D_x}{P_x} k^x = P_x m_x \left(\frac{1}{1+r} \right)^x = P_x m_x \left((1+r) \right)^{-x}$$

formulák valamelyikével határozható meg, melyekben P_x a betöltött éveik száma alapján x -éveseknek az azonos halandósági színvonalu stacionér népességbeli számát, m_x az x évesek halálozási arányszámát, r pedig a természetes szaporodás intrinsic arányszámát jelenti. A halandósági tábla kiszámítását lehetővé tevő x -éves korra vonatkozó halálozások száma tehát:

$$\frac{P_x \frac{D_x}{P_x} k^x}{k^x} = \frac{P_x m_x \left(\frac{1}{1+r} \right)^x}{\left(\frac{1}{1+r} \right)^x} = \frac{P_x m_x \left((1+r) \right)^{-x}}{\left((1+r) \right)^{-x}} = P_x \frac{D_x}{P_x} = P_x m_x = D_x.$$

* Az a tény, hogy a halálozások száma mértani haladvány szerint növekszik, illetve csökken, természetesen nemcsak a halálozások naptári évenkénti számainak az egybevetése alapján dönthető el. Ha a halálozások naptári évenkénti számait ismerjük, akkor viszont nemcsak a mértani haladvány szerinti növekedés, illetve csökkenés ténye állapítható meg, hanem a valamely naptári év alatti halálozások száma elosztva az előző naptári év alatti halálozások számával egyben közvetlenül az $1+r$ tényező értékét is szolgáltatja. Ha viszont a halálozásoknak több, de azonos számú évet felölelő naptári periódusok alatti számait ismerjük, akkor az egyes periódusok alatti számuknak az előző azonos hosszúságú periódus alatti számukkal való osztásai útján a mértani haladvány szerinti változás ténye megállapítható ugyan, az $1+r$ értékét azonban csupán úgy számíthatjuk ki, ha a szóban forgó osztások azonos nagyságú eredményeiből annyiadik kitevőjű gyököt vonunk, ahány évet az egyes azonos hosszúságú naptári periódusok felölelnek.

Az így előállított D_x adatok birtokában kiszámítható a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség halandósági táblája és ez utóbbi birtokában a születéskor várható átlagos élettartam (e_0^0) mutatójának az értéke is:

$$e_0^0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} x D_x}{\sum_{x=0}^{\omega} D_x}.$$

Ez utóbbi, ha $r > 0$, magasabb a ténylegesen meghaltak átlagos életkoránál, mert a vonatkozó stabil növekvő, illetve csökkenő népesség korösszetétele fiatalabb a halandósági táblabeli stacionér népességénél, ha viszont $r < 0$, alacsonyabb a ténylegesen meghaltak átlagos életkoránál, mert a vonatkozó stabil növekvő, illetve csökkenő népesség korösszetétele öregebb a halandósági táblabeli stacionér népességénél.

A népesség korösszetétele (s ennek alapján átlagos életkora) a halandósági táblabeli L_x mutató értékének a $k^x = [1/(1+r)]^x = (1+r)^{-x}$ tényezővel való megszorozása és az így nyert eredményeknek a szorzatok összegével való elosztása útján határozható meg.

A mindkét nembeli stabil népesség korévenkénti (ill. korcsoportonkénti) nemek szerinti összetételét, a mindkét nembeli stabil népesség korösszetételét, nyers születési és halálalozási arányszámát, a 0-14 éveseknek és a 60 éveseknek és idősebbeknek a 15-59 évesekhez viszonyított arányát (a DEP.RATIO értékét) stb. a halálalozások korstrukturájának birtokában legegyszerűbben a következőképpen határozhatjuk meg.

Induljunk ki illusztrációképpen Ansley J. Coale és Paul Demeny Regional Model Life Tables and Stable Populations című, a Princetoni Egyetemi Nyomda által 1966-ban megjelentetett ismert könyve azon keleti-típusú stabil női népessége és a hozzátartozó férfi népesség halálalozásainak életkor szerinti megoszlásából, melyben a női népesség esetében $e_0^0 = 77,50$ év és $r = 5,00\%$, a férfi népesség esetében pedig $e_0^0 = 72,74$ és $r = 5,00\%$, és tekintsük át, hogy miként alakíthatók át a halálalozások a vonatkozó stabil növekvő népességre jellemző strukturái a bennünket érdeklő halandósági táblabeli, vagyis stacionér strukturáivá.*

* Az illusztrációként szereplő népesség jellemzői természetesen semmiféle régmúltbeli népesség jellemzőire nem hasonlítanak; e referátum szerzője a vonatkozó számításukat hazája népességének jövőbeni és nem valamely igen távoli múltbeli népesség jellemzői közötti összefüggéseknek a feltárása céljából dolgozta ki. A szóban forgó népességrekonstrukció során követendő eljárás azonban, a vázolt feltételek fennforgása esetén, régmúltbeli népességek esetében is szigorúan ugyanaz.

A számítás menetét szemléltető 4.1/a és 4.1/b. táblában $ak = 1/(1+r)$ tényező értéke $1/0,005 = 0,9950249$. Ennek a számnak a birtokában kell tehát a feltüntetett korcsoportok figyelembevételével a $k^0, k^{2,5}, k^7, k^{12}, k^{17}, k^{22}$ stb. értékeket kiszámítanunk. Ezeket az értékeket a szóban forgó táblák (3) oszlopa tartalmazza. Ez utóbbiak birtokában számíthatók ki a már vázolt módszerrel a (4) oszlop adatai, melyek összegének strukturája, vagyis életkor szerinti százalékos megoszlása a halálozások keresett halandósági táblabeli, vagyis stacionér kormegoszlását (a $d_{r=0,x}$ elemeit) adja (lásd az (5) oszlopot). A halálozások ily módon előállított kormegoszlásai elemei, vagyis a $d_{r=0,x}$ mutató értékei a k^x tényezővel alkotott szorzatait (lásd a (6) oszlopot) e szorzatok összegével, vagyis

$$\sum_{x=0}^{\omega} d_{r=0,x} k^x \text{ - szel elosztva ismét a halálozások tényleges kormegoszlásának az adatai-}$$

hoz jutunk (lásd a (2) oszlopot). A halálozások halandósági táblabeli kormegoszlásának adataiból (lásd az (5) oszlopot) az ismert módszerekkel kiszámíthatjuk a szóban forgó népességek halandósági tábláját. Ez a halandósági tábla, stabil növekvő, ill. csökkenő népességek esetében egyben a vonatkozó zárt népességet alkotó születési évjáratok (generációk) közös halandósági táblája is.

A népesség (ill. a leélt évek száma) halandósági táblabeli kormegoszlásának $(L_x / T_0 = \alpha_{r=0,x})$ adataiból a 4.2/a és 4.2/b táblák által szemléltetett módon számíthatók ki az $\alpha_{r=0,x} k^x$ értékek (lásd a (3) oszlopot), mely utóbbiak $\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x$ ösz-

szegükkal elosztva a népesség (ill. a leélt évek száma) tényleges kormegoszlását eredményezik (lásd a (4) oszlopot).

A nyers születési arányszám (b) és halálozási arányszám (d) értékének, valamint az élő népesség és a meghaltak halandósági táblabeli és tényleges átlagos életkora kiszámításának az előkészítését a 4.3/a és 4.3/b. tábla szemlélteti.

4.1/a. Az évi 5%-kal szaporodó, 77.50 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil női népességben előforduló halálozások korstrukturájának a halandósági táblabeli halálozások korstrukturájává való átalakítása

Kor- csoport (év) $x, x+n$	A halálozások tényleges kormegoszlása (%)	$k^x = \left(\frac{1}{1+r}\right)^x =$ $= \left(\frac{1}{1,005}\right)^x =$ $= 0,9950249^x$	(2) : (3)	A halálozások halandósági táblabeli kor- megoszlása $d_{r=0,x}$ (%)	$d_{r=0,x} \cdot k^x$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) = $\frac{(5)}{100} \cdot k^x$
0	1,98	1,0000000	1,9800000	1,36	0,0136000
1 - 4	0,18	0,9876086	0,1822584	0,12	0,0011851
5 - 9	0,08	0,9656896	0,0828424	0,05	0,0004828
10 - 14	0,07	0,9419053	0,0743174	0,05	0,0004710
15 - 19	0,12	0,9187068	0,1306184	0,09	0,0008268
20 - 24	0,17	0,8960797	0,1897153	0,13	0,0011649
25 - 29	0,20	0,8740099	0,2288304	0,16	0,0013984
30 - 34	0,26	0,8524836	0,3049912	0,21	0,0017902
35 - 39	0,39	0,8314875	0,4690389	0,32	0,0026608
40 - 44	0,62	0,8110085	0,7644803	0,52	0,0042172
45 - 49	1,06	0,7910339	1,3400184	0,92	0,0072775
50 - 54	1,68	0,7715513	2,1774314	1,49	0,0114961
55 - 59	2,53	0,7525485	3,3619096	2,30	0,0173086
60 - 64	4,15	0,7340137	5,6538454	3,88	0,0284797
65 - 69	7,16	0,7159354	10,0009023	6,86	0,0491132
70 - 74	12,32	0,6983024	17,6427863	12,10	0,0844946
75 - 79	18,23	0,6811037	26,7653810	18,37	0,1251187
80 -	48,81	0,6574724	74,2388629	51,07	0,3296282
Összesen	100,00	-	145,5882300	100,00	0,6807138

4.1/b. Az évi 5%₀-kel szaporodó, 72,74 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil férfi népességben előforduló halálozások korstrukturájának a halandósági táblabeli halálozások korstrukturájává való átalakítása

Kor-csoport (év) $x, x+n$	A halálozások tényleges kormegoszlása (%)	$k^x = \left(\frac{1}{1+r}\right)^x =$ $= \left(\frac{1}{1,005}\right)^x =$ $= 0,9950249^x$	(2) : (3)	A halálozások halandósági táblabeli kor- megoszlása $d_{r=0,x}$ (%)	$d_{r=0,x} \cdot k^x$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) = $= \frac{(5)}{100} \cdot k^x$
0	2,54	1,0000000	2,5400000	1,78	0,0178000
1 - 4	0,22	0,9876086	0,2227603	0,15	0,0014814
5 - 9	0,13	0,9656896	0,1346188	0,10	0,0009657
10 - 14	0,16	0,9419053	0,1698685	0,12	0,0011303
15 - 19	0,34	0,9187068	0,3700854	0,26	0,0023886
20 - 24	0,48	0,8960797	0,5356666	0,37	0,0033155
25 - 29	0,47	0,8740099	0,5377513	0,38	0,0033212
30 - 34	0,51	0,8524836	0,5982520	0,42	0,0035804
35 - 39	0,63	0,8314875	0,7576783	0,53	0,0044069
40 - 44	0,96	0,8110085	1,1837114	0,83	0,0067314
45 - 49	1,70	0,7910339	2,1490862	1,50	0,0118655
50 - 54	3,13	0,7715513	4,0567620	2,85	0,0219892
55 - 59	5,12	0,7525485	6,8035482	4,77	0,0358966
60 - 64	7,53	0,7340137	10,2586641	7,19	0,0527756
65 - 69	10,49	0,7159354	14,6521600	10,28	0,0735982
70 - 74	14,38	0,6983024	20,5927976	14,45	0,1009047
75 - 79	17,27	0,6811037	25,3559040	17,79	0,1211683
80 -	33,94	0,6554994	51,7773145	36,22	0,2343782
Összesen	100,00	-	142,6966292	100,00	0,6976977

4.2/a. A népességnek (ill. a leélt évek számának) az évi 5%-kal szaporodó, 77,50 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil női népesség halandósági táblabeli és tényleges korstrukturája

Kor-csoport (év)	A népesség (ill. a leélt évek száma) halandósági táblabeli kormegoszlása	$\alpha_{r=0,x} k^x$	A népesség (ill. a leélt évek száma) tényleges kormegoszlása
$x, x+n$	$\alpha_{r=0,x}$		$\frac{\alpha_{r=0,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x}$
(1)	(2)	(3)	(4)
0	0,0127	0,0127000	0,0154
1 - 4	0,0509	0,0502693	0,0608
5 - 9	0,0635	0,0613213	0,0743
10 - 14	0,0635	0,0598110	0,0724
15 - 19	0,0635	0,0583379	0,0706
20 - 24	0,0634	0,0568115	0,0688
25 - 29	0,0633	0,0553248	0,0670
30 - 34	0,0632	0,0538770	0,0652
35 - 39	0,0630	0,0523837	0,0634
40 - 44	0,0627	0,0508502	0,0616
45 - 49	0,0623	0,0492814	0,0596
50 - 54	0,0615	0,0474504	0,0574
55 - 59	0,0603	0,0453787	0,0549
60 - 64	0,0583	0,0427930	0,0518
65 - 69	0,0548	0,0392333	0,0475
70 - 74	0,0487	0,0340073	0,0411
75 - 79	0,0389	0,0264949	0,0320
80 -	0,0456	0,0276334	0,0362
Összesen	1,0000	0,8239591	1,0000

4.2/b. A népességnek (ill. a leélt évek számának) az évi 5‰-kel szaporodó, 72,74 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil férfi népesség halandósági táblabeli és tényleges korstrukturája

Kor-csoport (év) $x, x+n$	A népesség (ill. a leélt évek száma) halandósági táblabeli kormegoszlása $\alpha_{r=0, x}$	$\alpha_{r=0, x} k^x$	A népesség (ill. a leélt évek száma) tényleges kormegoszlása $\frac{\alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x}$
(1)	(2)	(3)	(4)
0	0,0135	0,0135000	0,0162
1 - 4	0,0540	0,0533309	0,0639
5 - 9	0,0674	0,0650875	0,0781
10 - 14	0,0673	0,0633902	0,0761
15 - 19	0,0672	0,0617371	0,0740
20 - 24	0,0669	0,0599477	0,0720
25 - 29	0,0667	0,0582965	0,0699
30 - 34	0,0664	0,0566049	0,0679
35 - 39	0,0661	0,0549613	0,0659
40 - 44	0,0656	0,0532022	0,0638
45 - 49	0,0648	0,0512590	0,0615
50 - 54	0,0633	0,0488392	0,0586
55 - 59	0,0607	0,0456797	0,0548
60 - 64	0,0566	0,0415452	0,0498
65 - 69	0,0506	0,0362263	0,0434
70 - 74	0,0421	0,0293985	0,0352
75 - 79	0,0310	0,0211142	0,0253
80 -	0,0298	0,0170464	0,0235
Összesen	1,0000	0,8111568	1,0000

4.3/a. Az élők és a meghaltak átlagos életkora kiszámításának előkészítése az évi 5%-kel szaporodó 77, 50 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil női népességben és annak halandósági táblájában

Kor-csoport (év)	A népesség (ill. a leélt évek száma) halandósági táblabeli megoszlása $\alpha_{r=0,x}$	A halálozások egységnyi gyökű halan- dósági táblán belüli meg- oszlása $\alpha_{d,r=0,x}$	$\bar{x} \propto_{r=0,x}$	$\bar{x} \propto_{r=0,x} k^x$	$\bar{x} \propto_{d,x=0,x}$	$\bar{x} \propto_{d,r=0,x} k^x$
x, x+n	$\alpha_{r=0,x}$	$\alpha_{d,r=0,x}$				
(1)	(2)	(3)	(4)= $\bar{x}$ (2)	(5)= $\bar{x} k^x$ (2)	(6)= $\bar{x}$ (3)	(7)= $\bar{x} k^x$ (3)
0	0,0127	0,0136	0,00635	0,0063500	0,00680	0,0068000
1 - 4	0,0509	0,0012	0,15270	0,1508079	0,00360	0,0035553
5 - 9	0,0635	0,0005	0,47625	0,4599098	0,00375	0,0036210
10 - 14	0,0635	0,0005	0,79375	0,7476375	0,00625	0,0058875
15 - 19	0,0635	0,0009	1,11125	1,0209133	0,01575	0,0144690
20 - 24	0,0634	0,0013	1,42650	1,2782588	0,02925	0,0262103
25 - 29	0,0633	0,0016	1,74075	1,5214320	0,04400	0,0384560
30 - 34	0,0632	0,0021	2,05400	1,7510025	0,06825	0,0581815
35 - 39	0,0630	0,0032	2,36250	1,9643888	0,12000	0,0997800
40 - 44	0,0627	0,0052	2,66475	2,1611335	0,22100	0,1792310
45 - 49	0,0623	0,0092	2,95925	2,3408665	0,43700	0,3456813
50 - 54	0,0615	0,0149	3,22875	2,4911460	0,78225	0,6035453
55 - 59	0,0603	0,0230	3,46725	2,6092753	1,32250	0,9952445
60 - 64	0,0583	0,0388	3,64375	2,6745625	2,42500	1,7799813
65 - 69	0,0548	0,0686	3,69900	2,6482478	4,63050	3,3151410
70 - 74	0,0487	0,1210	3,53075	2,4655293	8,77250	6,1258585
75 - 79	0,0389	0,1837	3,01475	2,0533548	14,23675	9,6966993
80 -	0,0456	0,5107	3,86770	2,4465347	44,37485	28,6877692
Összesen	1,0000	1,0000	40,20000	30,7913510	77,50000	51,9861120

4.3/b. Az élők és a meghaltak átlagos életkora kiszámításának előkészítése az évi 5%-kel szaporodó, 72, 74 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusu stabil férfi népességben és annak halandósági táblájában

Kor-csoport (év)	A népesség (ill. a leélt évek száma) halandósági táblabeli megoszlása $\alpha_{r=0,x}$	A halálozások egységnyi gyökű halan- dósági táblán belüli meg- oszlása $\alpha_{d,r=0,x}$	$\bar{x} \propto_{r=0,x}$	$\bar{x} \propto_{r=0,x} k^x$	$\bar{x} \propto_{d,x=0,x}$	$\bar{x} \propto_{d,r=0,x} k^x$
x, x+n						
(1)	(2)	(3)	(4)= $\bar{x}$ (2)	(5)= $\bar{x} k^x$ (2)	(6) = $\bar{x}$ (3)	(7)= $\bar{x} k^x$ (3)
0	0,0135	0,0178	0,00675	0,0067500	0,00890	0,0089000
1 - 4	0,0540	0,0015	0,16200	0,1599927	0,00450	0,0044442
5 - 9	0,0674	0,0010	0,50550	0,4881563	0,00750	0,0072428
10 - 14	0,0673	0,0012	0,84125	0,7923775	0,01500	0,0141288
15 - 19	0,0672	0,0026	1,17600	1,0803993	0,04550	0,0418005
20 - 24	0,0669	0,0037	1,50525	1,3488233	0,08325	0,0745988
25 - 29	0,0667	0,0038	1,83425	1,6031538	0,10450	0,0913330
30 - 34	0,0664	0,0042	2,15800	1,8396593	0,13650	0,1163630
35 - 39	0,0661	0,0053	2,47875	2,0610488	0,19875	0,1652588
40 - 44	0,0656	0,0083	2,78800	2,2610935	0,32275	0,2860845
45 - 49	0,0648	0,0150	3,07800	2,4348025	0,71250	0,5636113
50 - 54	0,0633	0,0285	3,32325	2,5640580	1,49625	1,1544330
55 - 59	0,0607	0,0477	3,49025	2,6265828	2,74275	2,0640545
60 - 64	0,0566	0,0719	3,53750	2,5965750	4,49375	3,2984750
65 - 69	0,0506	0,1028	3,41550	2,4452753	6,93900	4,9678785
70 - 74	0,0421	0,1445	3,05225	2,1313913	10,47625	7,3155908
75 - 79	0,0310	0,1779	2,40250	1,6363505	13,78725	9,3905433
80 -	0,0298	0,3622	2,52500	1,5629181	31,16510	20,1950582
Összesen	1,0000	1,0000	38,28000	29,6394080	72,74000	49,7597990

A 4.3/a és a 4.3/b tábla adatai alapján is illusztrálható, hogy a nyers születési és halálozási arányszám értéke a népesség halandósági táblája alapján számítva egyenlő a születéskor várható átlagos élettartam reciprok értékével

$$b_{r=0} = d_{r=0} = \frac{1}{e_0^o} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{d,r=0,x}}.$$

A női népesség esetében

$$b_{r=0} = d_{r=0} = \frac{1}{77,50} = 0,0129032,$$

vagyis 12,90 ‰, a férfi népesség esetében pedig

$$b_{r=0} = d_{r=0} = \frac{1}{72,74} = 0,0137475,$$

vagyis 13,75 ‰.

A szóban forgó stabil növekvő női népességben a nyers születési arányszám értéke:

$$\begin{aligned} b_{r \geq 0} &= \frac{b_{r=0}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x} = \frac{0,0129032}{0,8239591} = \\ &= \frac{1}{e_0^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{x=0,x} k^x} = \frac{1}{63,85683} = 0,01566 \end{aligned}$$

vagyis 15,66 ‰, a hozzátartozó stabil növekvő férfi népességben pedig

$$\begin{aligned} b_{r \geq 0} &= \frac{b_{r=0}}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x} = \frac{0,0137475}{0,8311668} = \\ &= \frac{1}{e_0^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x} = \frac{1}{60,459073} = 0,01654, \text{ vagyis } 16,54 \text{ ‰.} \end{aligned}$$

A szóban forgó stabil növekvő női népességben a nyers halálozási arányszám értéke:

$$d_{r \geq 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,r=0,x} k^x}{e_0^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0,x} k^x} = \frac{0,6807138}{63,85683} = 0,01066,$$

vagyis 10,66 ‰, a hozzá tartozó stabil növekvő férfi népességben pedig

$$d_r \approx 0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{e_0^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = \frac{0,6976977}{60,459073} = 0,01154,$$

vagyis 11,54 ‰.

A természetes szaporodás intrinszc arányszámának értéke a női és a férfi népesség esetében egyaránt

$$r = b_r \approx 0 - d_r \approx 0 = \frac{1 - \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d, r=0, x} k^x}{e_0^o \sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} =$$

$$= \frac{0,3192862}{63,85683} = \frac{0,3023023}{60,459073} = 0,005,$$

vagyis 5 ‰.

Az élők átlagos életkora a szóban forgó stabil növekvő női népesség halandósági táblája alapján számítva:

$$\bar{a}_{r=0} = \sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{r=0, x} = 40,20 \text{ év},$$

ténylegesen pedig:

$$\bar{a}_r \approx 0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = \frac{30,791351}{0,8239591} = 37,37 \text{ év}.$$

A stabil növekvő férfi népesség halandósági táblája alapján számítva:

$$\bar{a}_{r=0} = \sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{r=0, x} = 38,28 \text{ év},$$

ténylegesen pedig:

$$\bar{a}_r \approx 0 = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{r=0, x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{r=0, x} k^x} = \frac{29,639408}{0,8311668} = 35,66 \text{ év}.$$

Az élők tényleges átlagos életkora ($\bar{a}_r \approx 0$) természetesen a 4.2/a és a 4.2/b tábla (4) oszlopában szereplő súlyarányok felhasználásával közvetlenül is kiszámítható.

A meghaltak átlagos életkora a szóban forgó stabil női népesség halandósági táblája alapján számítva:

$$e_o^0 = \sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{d,r=0,x} = 77,50 \text{ év,}$$

ténylegesen pedig:

$$\bar{e} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{d,r=0,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,r=0,x} k^x} = \frac{51,986112}{0,6807138} = 76,37 \text{ év.}$$

A meghaltak átlagos életkora a stabil növekvő férfi népesség halandósági táblája alapján számítva:

$$e_o^0 = \sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{d,r=0,x} = 72,74 \text{ év,}$$

ténylegesen pedig:

$$\bar{e} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \bar{x} \alpha_{d,r=0,x} k^x}{\sum_{x=0}^{\omega} \alpha_{d,r=0,x} k^x} = \frac{49,759799}{0,6976977} = 71,32 \text{ év.}$$

A meghaltak tényleges átlagos életkora ($\bar{e}$) természetesen a "megfigyelési eredmények" alapján, vagyis a 4.1/a és a 4.1/b tábla (2) oszlopában szereplő súlyarányok felhasználásával közvetlenül is kiszámítható.

A szóban forgó keleti-típusú stabil női népességben ($e_o^0 = 77,50$ év, $r = 5,00 \text{ ‰}$) és a hozzá tartozó keleti-típusú stabil férfi népességben ($e_o^0 = 72,74$ év, $r = 5,00 \text{ ‰}$) tehát a korösszetétel, a nyers születési arányszám (b), a nyers halálozási arányszám (d), az élők átlagos életkora ($\bar{a}$), a meghaltak átlagos életkora ($\bar{e}$) és a 0-14 éveseknek és a 60 éveseknek és idősebbeknek a 15-59 évesekhez viszonyított aránya (DEP.RATIO) az alábbiak szerint alakul:

4.4. A szóban forgó keleti-típusú stabil női népesség
és a hozzá tartozó stabil férfi népesség korstrukturája

Korcsoport (év) $x, x+n$	A női népesség kormegoszlása (%)	A férfi népesség kormegoszlása (%)
0	1,54	1,62
1 - 4	6,08	6,39
5 - 9	7,43	7,81
10 - 14	7,24	7,61
15 - 19	7,06	7,40
20 - 24	6,88	7,20
25 - 29	6,70	6,99
30 - 34	6,52	6,79
35 - 39	6,34	6,59
40 - 44	6,16	6,38
45 - 49	5,96	6,15
50 - 54	5,74	5,86
55 - 59	5,49	5,48
60 - 64	5,18	4,98
65 - 69	4,75	4,34
70 - 74	4,11	3,52
75 - 79	3,20	2,53
80 -	3,62	2,35
Összesen	100,00	100,00

A női népességben:

$$b = 15,66 \text{ ‰}$$

$$d = 10,66 \text{ ‰}$$

$$r = 5,00 \text{ ‰}$$

$$\bar{a} = 37,37 \text{ év}$$

$$\bar{e} = 76,37 \text{ év}$$

$$\text{DEP. RATIO} = 0,759$$

A férfi népességben: $b = 16,54 \text{ ‰}$

$$d = 11,54 \text{ ‰}$$

$$r = 5,00 \text{ ‰}$$

$$\bar{a} = 35,66 \text{ év}$$

$$\bar{e} = 71,32 \text{ év}$$

$$\text{DEP. RATIO} = 0,699$$

Kíséreljük meg a fenti adatok birtokában felelni a következő kérdésekre:

- a) Hogyan alakul a közölt adatok alapján kiszámítható mindkét nembeli keleti-típusú stabil népességnek a kormegoszlása?
- b) Hány százalékot tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben a férfiak és a nők össznépességben belüli aránya?
- c) Hány évet tesz ki e mindkét nembeli stabil népesség születéskor várható átlagos élettartama?
- d) Hány ezreléket tesz ki a szóban forgó mindkét nembeli stabil népesség nyers születési arányszáma?
- e) Hány ezreléket tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben a nyers halálozási arányszám?
- f) Hány évet tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben az élők átlagos életkora?
- g) Hány évet tesz ki e mindkét nembeli stabil népességben a meghaltak átlagos életkora?
- h) Hogyan alakul e mindkét nembeli stabil népességben a 0-14 éveseknek és a 60 éveseknek és idősebbeknek a 15-59 évesekhez viszonyított aránya?
- i) Mivel magyarázható, hogy a c) kérdésre adott válaszuk különbözik a g) kérdésre adott válaszuktól?

A mindkét nembeli stabil népesség demográfiai jellemzőinek meghatározása során abból a megfontolásból célszerű kiindulnunk, hogy a természetes szaporodás intrinszik arányszámának (r) az értéke a férfi népesség esetében ugyanaz, mint a női népesség esetében, s így az össznépesség és az egyes korévek (korcsoportok) népessége nemek szerinti struktúrája is állandó.

Az össznépesség és az egyes korévek (korcsoportok) népességének nemek szerinti megoszlása a mindkét nembeli stabil népességben, valamint a mindkét nembeli stabil népesség korstruktúrája legegyszerűbben a vonatkozó stabil férfi népesség és a stabil női népesség időben változatlan nyers születési arányszámai reciprokok értékeinek a felhasználásával számítható ki. Korábbi jelöléseinket alkalmazva megállapíthatjuk, hogy stabil népességben:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x}} = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1+r)^{-x},$$

ami stacionér népességben a születéskor várható átlagos élettartammal egyenlő:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_x}{B} (1+0)^{-x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_x}{B} = \frac{P}{B} = e_o^o,$$

ill., a halandósági tábla jelöléseivel:

$$\sum_{x=0}^{\omega} \frac{L_x}{l_o} (1+0)^{-x} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} L_x}{l_o} = \frac{T_o}{l_o} = e_o^o.$$

A születéskor várható átlagos élettartam az újszülöttek által leélendő összes évek számának (P , ill. T_o) egy újszülöttre jutó hányadát (P/B , ill. $T_o/l_o = e_o^o$) jelenti, mivel azonban P , ill. T_o mutatója a stacionér népesség összlétszámának is, a születéskor várható átlagos élettartam (e_o^o), ami stacionér népességben - mint láttuk - a nyers születési arányszám reciproka ($e_o^o = 1/b$), az egy élveszületésre jutó népességszám mutatójaként is felfogható. Stabil növekvő, ill. stabil csökkenő népességben a nyers születési arányszám reciprok értéke nem mutatója a születéskor várható átlagos élettartamnak, csupán az egy élveszületésre jutó un. folyó évi (0. évi) népességszámot mutatja. Minthogy 100 leány-élveszületésre elegendő nagy létszámú népességek esetében általában 105 fiú-élveszületés jut, a stabil férfi népesség nyers születési arányszámának a reciprok értékét ($1/b^f$), ill. a stacionér férfi népesség születéskor várható átlagos élettartamát (e_o^{of}) meg kell szoroznunk 1,05-dal, hogy a vonatkozó stabil női népesség nyers születési arányszáma reciprok értékével ($1/b^n$), ill. a vonatkozó stacionér női népesség születéskor várható átlagos élettartamával (e_o^{on}) a mindkét nembeli stabil népesség nemek szerinti összetételének alakulása szempontjából egybevethető legyen. A stabil férfi népességnek (P^f) a mindkét nembeli stabil népességen belüli aránya:

$$\frac{P^f}{P^f + P^n} = \frac{\frac{1,05}{b^f}}{\frac{1,05}{b^f} + \frac{1}{b^n}},$$

ill. stacionér népességben:

$$\frac{P^f}{P^f + P^n} = \frac{1,05 e_o^{of}}{1,05 e_o^{of} + e_o^{on}}.$$

A stabil női népességnek (P^n) a mindkét nembeli stabil népességen belüli aránya:

$$\frac{P^n}{P^f + P^n} = \frac{\frac{1}{b^n}}{\frac{1,05}{b^f} + \frac{1}{b^n}}$$

ill. stacionér népességben

$$\frac{P^n}{P^f + P^n} = \frac{e_o^{on}}{1,05 e_o^{of} + e_o^{on}} .$$

A stabil férfi népességnek a vonatkozó stabil női népességhez viszonyított aránya:

$$\frac{P^f}{P^n} = \frac{\frac{1,05}{b^f}}{\frac{1}{b^n}} = \frac{1,05 b^n}{b^f} .$$

A stabil női népességnek a vonatkozó stabil férfi népességhez viszonyított aránya:

$$\frac{P^n}{P^f} = \frac{\frac{1}{b^n}}{\frac{1,05}{b^f}} = \frac{b^f}{1,05 b^n} .$$

A mindkét nembeli stabil népesség korösszetételének a kiszámítása a fentiek alapján:

1. a stabil női népesség egyes korévekhez (korcsoportokhoz) tartozó hányadainak és az ehhez tartozó stabil férfi népesség egyes korévekhez (korcsoportokhoz) tartozó hányadainak e népességek nyers születési arányszáma reciprok értékeivel való megszorozása;

2. a stabil férfi népesség ezuton nyert korévenkénti (korcsoportonkénti) adatainak a férfi népesség születési többletét kifejező 1,05-dal való megszorozása;

3. a stabil férfi népesség a 2. alatt jelzett művelet eredményeként kapott korévenkénti (korcsoportonkénti) adatainak és a stabil női népesség az 1. alatt jelzett művelet eredményeként kapott korévenkénti (korcsoportonkénti) adatainak korévenként (korcsoportonként) való összeadása;

4. az egyes korévek (korcsoportok) férfi és női népessége együttes számának e népességek együttes összlétszámával való elosztása útján történhetik.

A 2. alatt jelzett művelet elvégzése után kerülhet sor a nemek korévenkénti (korcsoportonkénti) egymáshoz viszonyított arányának kiszámítására, a 3. alatt jelzett művelet elvégzése pedig az egyes korévek (korcsoportok) mindkét nembeli stabil népessége nemek szerinti megoszlásának kiszámítását is lehetővé teszi.

Az a) kérdés megoldásával kapcsolatban figyelembe veendő, hogy a nők esetében $1/b = 1/15, 66 \text{ ‰} = 63,839$, a férfiak esetében pedig $1/b = 1/16, 54 \text{ ‰} = 60,468$.

A szóban forgó mindkét nembeli stabil népesség nemek és kor szerinti összetétele meghatározásának a menetét az I. fejezetben található 1.10. tábla szemlélteti.

Ennek alapján a férfiak össznépességen belüli aránya =

$$= \frac{63,487}{63,839 + 63,487} = \frac{63,487}{127,326} = 49,86 \%$$

A nők össznépességen belüli aránya =

$$= \frac{63,839}{63,839 + 63,487} = \frac{63,839}{127,326} = 50,14 \%$$

A születéskor várható átlagos élettartam:

$$\begin{aligned} 77,50 \times 0,488 &= 37,82 \\ 72,74 \times 0,512 &= \frac{37,24}{75,06} \text{ év.} \end{aligned}$$

A nyers születési arányszám:

$$\begin{aligned} 15,66 \times 0,5014 &= 7,8519 \\ 16,54 \times 0,4986 &= \frac{8,2468}{16,0987} \text{ ‰} \end{aligned}$$

A nyers halálozási arányszám:

$$\begin{aligned} 10,66 \times 0,5014 &= 5,3449 \\ 11,54 \times 0,4986 &= \frac{5,7538}{11,0987} \text{ ‰} \\ \text{és } 16,0987 - 11,0987 &= 5,00 \text{ ‰} \end{aligned}$$

Az élők átlagos életkora:

$$\begin{aligned} 37,37 \times 0,5014 &= 18,74 \\ 35,66 \times 0,4986 &= \frac{17,78}{36,52} \text{ év.} \end{aligned}$$

A meghaltak átlagos életkora:

$$\begin{aligned} 76,37 \times \frac{63,837 \times 0,0106600}{127,324 \times 0,0110987} &= 36,78 \\ 71,32 \times \frac{63,487 \times 0,0115400}{127,324 \times 0,0110987} &= \frac{36,97}{73,75} \text{ év.} \end{aligned}$$

A 10-14 évesek és a 60 évesek és idősebbek a 15-59 évesekhez viszonyított aránya:

$$\begin{aligned} 0,759 \times 0,5014 &= 0,381 \\ 0,699 \times 0,4986 &= \frac{0,348}{0,729} \end{aligned}$$

A születéskor várható átlagos élettartamnak (e_0^O) és a meghaltak átlagos életkorának ($\bar{e}$) eltérése:

$\bar{e} \neq e_0^O$, vagyis $73,75 \neq 75,06$, mert a népesség nem stacionér, hanem évente 5 ‰-kel nő. Csak a $r = 0$ ‰-es évi növekedési rátájú azonos halandósági színvonalu mindkét nembeli stabil népességben lenne az e_0^O és $\bar{e}$ értéke is 75,06 év. A $r = 5$ ‰-es évi nö-

vekedési rátájú stabil népesség korösszetétele fiatalabb a $r = 0$ ‰-es évi növekedési rátájú azonos halandósági színvonalú stabil népességénél, ezért $\bar{e} < e_0^0$.

A szóban forgó népességnek természetesen számos egyéb demográfiai jellemzője is megállapítható. A női népesség halálozásainak stacionér struktúrája alapján például kiszámíthatjuk, hogy a női népességben 30 éves koráig az újszülöttek 1,97 ‰-a hal meg. Minthogy $100,00\% - 1,97\% = 98,03\%$; $98,03/100,00 = 0,9803$ és $100,00/98,03 = 1,0200958$, megállapíthatjuk, hogy az anyák gyermekeik megszületés kori átlagos életkorát (T) 29 év körül-

nek véve az $r = \sqrt[T]{R_0} - 1$ igen egyszerű közismert formula alapján a nettó reprodukciós együttható (R_0) értéke közelítő pontossággal:

$$R_0 = (1+r)^T = 1,005^{29} = 1,155\,622,$$

a bruttó reprodukciós együtthatóé (R) pedig:

$$R = 1,155\,622 \times 1,0200958 = 1,178845.$$

100 leányélveszületésre 105 fiúélveszületést számítva tehát a nettó teljes termékenység közelítő pontossággal számítva:

$$1,155\,622 + 1,2134031 = 2,369,$$

a bruttó teljes termékenység pedig:

$$1,179 + 1,238 = 2,417.$$

A népességrekonstrukció a vázolt feltételek, vagyis a népesség stabil jellegének a feltételezhetősége esetén, kiterjedhet a népesség és a különböző nemű és koru szubpopulációk különböző időpontokra vonatkozó számának s ezáltal időbeli alakulásának a megállapítására is. Induljunk ki pl. abból a feltételezésből, hogy a meghaltak számát és összetételét egy olyan temető feltárása alapján sikerült megállapítanunk, melybe egy zárt, háboruk, járványok és éhínségek által nem sújtott népesség száz éven át temetkezett; minden halottat eltemettek és csak ebbe a temetőbe temettek. Tételezzük fel továbbá, hogy a meghaltak számát sikerült legalább tíz naptári évet felölelő periódusokra vonatkozóan megállapítanunk, vagyis az eltemetett férfiak és nők számát tíz éves naptári periódusra vonatkozóan ismerjük. Ebben az esetben, ha feltételezhető, hogy a népesség stabil volt, vagyis strukturális jellemzőinek az állandóságán kívül a meghaltak számának időbeli változása alapján megítélve állandó volt a szaporodási aránya is, a következőképpen járhatunk el:

a) Meghatározzuk a halálozások (temetések) számának évi növekedési, ill. csökkenési arányát úgy, hogy a tizedik tízéves periódus alatt meghaltak (eltemetettek) számát elosztjuk a kilencedik tízéves periódus alatt meghaltak (eltemetettek) számával, ez utóbbit a nyolcadik naptári periódus alatt meghaltak számával stb. és az osztások eredményéül kapott állandónak az értékéből tizedik kitevőjű gyököt vonunk, ami az $1 + r = 1/k$ tényező értékét eredményezi.

Ebből

$$r = 1 + r - 1 = \frac{1}{k} - 1.$$

b) A száz év alatt összesen meghaltak számát egy mértani haladvány összegeként (s_n) fogjuk fel és annak ismeretében, hogy korábbi jelöléseinket alkalmazva:

$$s_{100} = \frac{(1+r)^{100} - 1}{1 + r - 1} \sum_{x=0}^{\omega} D_{99,x} = \frac{(1+r)^{100} - 1}{r} \sum_{x=0}^{\omega} D_{99,x},$$

ahol $\sum_{x=0}^{\omega} D_{99,x}$ a száz évet felölelő periódus első éve alatt meghaltak számát jelenti, ez utóbbit a

$$\sum_{x=0}^{\omega} D_{99,x} = \frac{s_{100} r}{(1+r)^{100} - 1}$$

formula segítségével kiszámítjuk.

c) A halálozások első év alatti számát a nyers halálozási arányszám értékével elosztva kiszámítjuk a népességnek az első év közepére vonatkozó számát, melyet a halálozások és az elveszületések számához hasonlóan évről évre a természetes szaporodás intrinszc arányszámának megfelelő irányban és arányban növekvőnek (ill. csökkenőnek) tekinthetünk.

d) A nyers elveszületési arányszám értékének birtokában az elveszületések egyes évek alatti száma és az egyes évek alatti természetes szaporodás is könnyen kiszámítható. Az elveszületések, a halálozások, a természetes szaporodás évi száma, valamint a népesség és a különböző nemű és koru szubpopulációk évközepi száma természetesen a periódus bármelyik évére vonatkozóan a mértani haladvány m -ik eleme kiszámítására szolgáló formula* segítségével is meghatározható. A különböző nemű és koru szubpopulációk az egyes naptári évek közepére vonatkozó számai legegyszerűbben a vonatkozó népességszámok és a népesség már ismert, stabil népességfejlődés esetén időben változatlan strukturális jellemzői alapján állapíthatók meg stb.

A régmúltbeli népességek természetesen nem minden esetben rekonstruálhatók a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség demográfiai jellemzői között fennálló összefüggések alapján, bár a klasszikus stabil népességi modellnek e szempontból nagyobb jelentősége van, mint a halandóság változásával is számoló kvázi stabil népesség, illetve a félig stabil népesség modelljének. Előfordulhat azonban, hogy a feltárt temetőjű népességnek nemcsak a stacionér jellege nem bizonyítható, hanem a háborúk, járványok, éhínségek távoli múltbeli gyakori előfordulása, valamint a stabil állapot kialakulásához és fennmaradásához szükséges jól ismert egyéb feltételek hiánya, illetve megszűnése miatt stabil növekvő, illetve stabil csökkenő jellege sem.

* $a_m = a_1 (1+r)^{m-1}$, ahol a_1 a haladvány első elemét jelöli. (A halálozások száma esetében

ezt $\sum_{x=0}^{\omega} D_{99,x}$ -szel jelöltük).

Mindenképpen nagy óvatossággal, körültekintéssel kell tehát eljárunk, ha valamely népességnek a demográfiai jellemzőit paleodemográfiai temetőfeltárások eredményei alapján kívánjuk rekonstruálni. Előfordulhat, hogy e rekonstrukció semmiféle ismert népességi modellnek a felhasználásával sem valósítható meg.

8. A népmozgalmi és a gazdasági események, valamint a különféle szubpopulációk un. stabil korfái alapján megállapítható főbb összefüggések

Értekezésünk e fejezetében megállapításainkat, figyelmünket a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatokra összpontosítva fejtjük ki. Ennek az utnak a követését az a korábbi fejtegetéseink során többször is demonstrált körülmény teszi lehetővé, hogy a demográfiai és a gazdasági jellemzők közötti kapcsolatokra vonatkozó megállapítások - per analogiam - a csupán a demográfiai jellemzők közötti kapcsolatokra is kiterjeszthetők és fordítva. A gazdaságilag aktív és inaktív népesség például éppugy szubpopuláció, mint a házas és a nem házas népesség, a különbség közöttük fejtegetéseink célja szempontjából csupán az, hogy kialakításuk gazdasági és nem tisztán demográfiai kritériumoknak az alapulvételével történt stb.

A stabil növekvő, illetve csökkenő népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatok legegyszerűbben annak a feltételezésével vizsgálhatók, hogy a termékenység és a halandóság korszpecifikus jellemzőinek a népesség stabilizálódását előidéző, illetve, - a stabilitás állapotának az elérése után - ezen stabil állapotnak fennmaradását biztosító változatlanokán kívül állandóak (változatlanok) a gazdasági események korszpecifikus intenzitásai, illetve nagyságai is. E feltételek együttes fennforgása a gazdasági események un. stabil korfáinak a kialakulásához vezet, melyek alapján a stabil növekvő, illetve csökkenő népesség demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatok viszonylag egyszerűen leírhatók.

Amennyiben valamely stabil népességben a gazdasági események korszpecifikus intenzitásai, illetve nagyságai is változatlanok, stabilakká válnak - mint jeleztük - a gazdasági események un. korfái is. Ebben a helyzetben

- állandó a gazdasági események valamely időszak (pl. egy év) alatti abszolút nagysága és a népesség időszak közepi száma közötti arány (változatlan pl. a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív népesség össznépességen belüli aránya, az egy lakosra jutó évi munkaidő, nem-munkaidő (szabadidő), termelés, fogyasztás és termelési, ill. fogyasztási többlet stb.), hasonlóan a stabil népesség nyers születési, halálozási és természetes szaporodási, ill. fogyási arányszámának a változatlanosságához;

- a stabil népesség évi szaporodását, ill. fogyását jelző intrinszc szaporodási arányszám (r) egyben gazdasági események volumenének az évi növekedését, ill. fogyását is mutatja. A stabil népesség korösszetétele ugyanis változatlan. Amennyiben tehát a gazda-

sági események korszpecifikus intenzitásai, ill. nagyságai is változatlanok, a gazdasági események összmennyisége ugyanolyan irányban és arányban változik, mint a népesség összlétszáma. Stabil népességben ezekkel azonos irányu és arányu - mint ismeretes - a születések és a halálozások abszolút számának az évenkénti változása is. Az 1948-1949. évi feltételek állandósulása esetén a születések, a halálozások és a népesség száma, valamint a gazdasági jelenségek volumene évi 1,3 %-o-*kel* növekedne ($r = 0,0023$), az 1959-1960. évi feltételek állandósulása esetén pedig évi 3,0 %-o-*kel* csökkenne ($r = -0,0030$) stb. Stacionér népességben e jelenségek volumenei időben változatlanok lennének:

- a születések, a halálozások és a népesség száma, valamint a gazdasági események összmennyisége nemcsak évenként gyarapodnak, ill. fogyna azonos arányban, hanem bármely más időtartam alatt is. A generációtávolságnak (T) megfelelő idő alatt pl. nemcsak a népesség, a születések és a halálozások száma, hanem a gazdasági események volumene is a nettó reprodukciós együttható (R_0) által jelzett mértékben változna meg. Az 1948-1949. évi feltételek állandósulása esetén e mennyiségek 27,1 év alatt (ez lenne a T , a generációtávolság, az anyák átlagos életkora gyermekeik megszületésekor) 1,06424-szeresükre (R_0) növekednének, az 1959-1960. évi feltételek állandósulása esetén pedig 25,8 év alatt 0,92464-szeresükre csökkennének. A generációtávolság (T) 27,1 évről 25,8 évre való csökkenése a nettó reprodukciós együttható (R_0) értékének az egység alá süllyedése (és a természetes szaporodás intrinszc arányszámának negatív előjelűvé válása) következtében a szóban forgó mennyiségek csökkenését gyorsítaná, mint erre - a vonatkozó stabil népességek számának az alakulásával kapcsolatban - Dr. Vukovich György is rámutatott (23). Stacionér népességben tehát e jelenségek volumene bármely más időszak alatt is, pl. a generációtávolságnak (T) megfelelő idő alatt is változatlan maradna ($R_0 = 1$);

- nemcsak a már jelzett azonos irányu és arányu változásokra kerülne sor, hanem azonos irányu és arányu lenne pl. az egyes korcsoportok (korévek) népessége által produkált gazdasági események mennyiségének és ezen események összmennyiségének a változása is. Nemcsak a népesség korösszetétele, hanem a gazdasági eseményeknek a "kormegoszlása" is változatlan maradna tehát, ami a stacionér népességben a gazdasági események az egyes korcsoportok (korévek) népessége által valamely időszak alatt produkált abszolút nagyságainak a változatlanságát is jelentené. Emiatt és a népesség korösszetételének a változatlansága miatt állandó lenne a különböző gazdasági eseményeket produkálók átlagos életkora is (pl. a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív népesség átlagos életkora, a termelők és a fogyasztók átlagos életkora stb. *

*Minthogy stabil népességben a férfi és a női népesség kormegoszlása, valamint az össznépesség és az egyes korévek (korcsoportok) népessége nemek szerinti megoszlása is állandó, megállapíthatjuk, hogy amennyiben a gazdasági események korszpecifikus intenzitásai, illetve nagyságai a férfi népesség esetében is és a női népesség esetében is változatlanok, állandó, bár egymástól eltérő a férfi és a női népesség által produkált gazdasági események életkor szerinti megoszlása is. Állandó továbbá a különböző neműek és koruk által produkált gazdasági események volumenének ezen események a vonatkozó korévek (korcsoportok) mindkét nembeli népessége által produkált volumenén belüli aránya és a különböző nemű összné-
./.

- változatlan lenne a gazdasági események a halandóságból adódó évi veszteségeinek a korstrukturája (stacionér népességben életkoronkénti abszolút nagysága is) stb.

E megállapítások helyessége természetesen matematikailag is bizonyítható. Láttuk, hogy amennyiben a tetszőleges stabil népességben a népesség valamely t -időpontban megfigyelhető számát P -vel, az egy évvel korábbi $t-1$ időpontban megfigyelhető számát pedig P' -vel, az x -éves korúak t -időpontbeli számát P_x -szel, a $t-1$ időpontbeli számát pedig P'_x -szel jelöljük és elfogadjuk, hogy

$$\frac{P'}{P} = \frac{P'_x}{P_x} = k,$$

azaz

$$P' = k P \text{ és } P'_x = k P_x,$$

vagyis

$$P = \frac{1}{k} P' \text{ és } P_x = \frac{1}{k} P'_x,$$

s ugyanakkor tudjuk, hogy

$$P = (1+r) P' \text{ és } P_x = (1+r) P'_x,$$

amiből kitűnik, hogy

$$\frac{1}{k} = 1+r \text{ és } k = \frac{1}{1+r},$$

vagyis

$$r = \frac{1}{k} - 1,$$

el kell fogadnunk azt is, hogy

$$\frac{P_x}{P} = \frac{P'_x}{P'} = k,$$

vagyis, hogy a népesség korösszetétele is változatlan. A gazdasági események időben változatlan korszpecifikus intenzitásait, illetve nagyságait gazd.,_x -szel, a gazdasági eseményeknek az x -évesek által produkált évi mennyiségét a t -időpontot megelőző és követő félévre vonatkozóan $P_{\text{gazd.,}_x}$ -szel, a $t-1$ időpontot megelőző és követő félévre vonatkozóan $P'_{\text{gazd.,}_x}$ -szel, évi összmenyiségét pedig $P_{\text{gazd.,}}$ -dal, ill. $P'_{\text{gazd.,}}$ -dal jelölve pedig megállapíthatjuk, hogy

pességek gazdasági teljesítményeinek és a mindkét nembeli össznépesség gazdasági teljesítményein belüli aránya is. Stacionér népességben a felsorolt viszonylagos nagyságokon (arányokon) kívül változatlanok a különböző neműek által produkált gazdasági események vonatkozó abszolút nagyságai is. Emiatt és a stabil férfi és a hozzátartozó stabil női népesség kormegoszlásának az állandósága és egymástól való különbözősége miatt állandó és egymástól eltérő a különböző gazdasági eseményeket produkáló férfiak és nők átlagos életkora is.

$$\frac{P'_x \cdot \text{gazd., } x}{P_x \cdot \text{gazd., } x} = \frac{P'_{\text{gazd., } x}}{P_{\text{gazd., } x}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P'_{\text{gazd., } x}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{\text{gazd., } x}} = \frac{P'_{\text{gazd.}}}{P_{\text{gazd.}}} = k,$$

azaz

$$P'_{\text{gazd.}} = k P_{\text{gazd.}} \quad \text{és} \quad P'_{\text{gazd., } x} = k P_{\text{gazd., } x},$$

vagyis

$$P_{\text{gazd.}} = (1+r) P'_{\text{gazd.}} \quad \text{és} \quad P_{\text{gazd., } x} = (1+r) P'_{\text{gazd., } x}.$$

Minthogy

$$P = (1+r) P' \quad \text{és} \quad P_x = (1+r) P'_x,$$

belátható, hogy

$$1+r = \frac{P}{P'} = \frac{P_x}{P'_x} = \frac{P_{\text{gazd.}}}{P'_{\text{gazd.}}} = \frac{P_{\text{gazd., } x}}{P'_{\text{gazd., } x}},$$

vagyis, hogy a természetes szaporodás, illetve fogyás intrinszc arányszáma a különböző korúak számának és a népesség összlétszámának, továbbá a gazdasági eseményeknek a különböző korúak által produkált évi mennyiségének és évi összmennyiségének évről évre bekövetkező változási arányát egyaránt kifejezi, s hogy

$$\frac{P'_{\text{gazd.}}}{P'} = \frac{P_{\text{gazd.}}}{P} \quad \text{és} \quad \frac{P'_{\text{gazd., } x}}{P'_{\text{gazd.}}} = \frac{P_{\text{gazd., } x}}{P_{\text{gazd.}}}$$

vagyis, hogy időben változatlan marad a gazdasági események egy lakosra jutó évi mennyisége és változatlan marad a gazdasági események életkor szerinti megoszlása is stb.

Hasonló módon bizonyítható az is, hogy a gazdasági események korszpecifikus intenzitásainak, illetve nagyságainak a változatlansága esetén változatlan a stabil népességben a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív népesség soraiba évenként belépőknek, valamint ezen szubpopulációk soraiból évenként a halandóság és egyéb okok miatt kiválóknak a különböző korúak számához és a népesség összlétszámához, a vonatkozó alnépességek különböző koru tagjainak a számához és összlétszámához stb. viszonyított aránya, s hogy a belépők és kiválók számának különbsége és a vonatkozó szubpopulációk időszak közepi létszáma közötti arány állandó, s - mint láttuk - egyenlő a népesség természetes szaporodásának, ill. fogyásának intrinszc arányszámával. Ez természetesen nemcsak a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív népesség esetében van így, hanem - mutatis mutandis - a többi gazdasági esemény esetében is. A valamely gazdasági eseményt produkálók közé évente ujonnan belépők gazdasági teljesítményei ($P_{\text{gazd., } b}$) és a közülük évente kiválók gazdasági teljesítményei ($P_{\text{gazd., } k}$) adatainak a birtokában tehát megállapíthatjuk, hogy

$$r = \frac{P_{\text{gazd., } b} - P_{\text{gazd., } k}}{P_{\text{gazd.}}} = \frac{P_{\text{gazd., } b}}{P_{\text{gazd.}}} - \frac{P_{\text{gazd., } k}}{P_{\text{gazd.}}} =$$

$$= \frac{B - D}{P} = \frac{B}{P} - \frac{D}{P} = b - d;$$

$$\frac{P_{\text{gazd., b}}}{P_{\text{gazd.}}} = \frac{P_{\text{gazd., b}}}{\sum_{x=0}^{\infty} P_{\text{gazd., x}} (1+r)^{-x}} = b_{\text{gazd.}}$$

Amennyiben a vonatkozó termékenységi, illetve gazdasági halandósági táblák felhasználásával kiszámítjuk az anyák átlagos életkorát leánygyermekük megszületésekor és a korábbiakhoz hasonlóan T^n -nel, a férfiak átlagos életkorát fiúgyermekük megszületésekor pedig T^f -fel, a gazdaságilag aktív személyek átlagos életkorát T^g -vel, a gazdaságilag inaktív személyek átlagos életkorát T^i -vel, a gazdaságilag aktívak átlagos életkorát termelésük korszpecifikus nagyságaival súlyozottan kiszámítva $T^{t, g}$ -vel, a népesség átlagos életkorát fogyasztása korszpecifikus nagyságaival súlyozottan kiszámítva T^f -fel stb. jelöljük, megállapíthatjuk, hogy

$$T^n : T^f : T^g : T^i : T^{t, g} : T^f = (1+r)^{T^n} : (1+r)^{T^f} : (1+r)^{T^g} : (1+r)^{T^i} : (1+r)^{T^{t, g}} : (1+r)^{T^f}$$

és

$$\begin{aligned} r &= \sqrt[T^n]{(1+r)^{T^n}} - 1 = \sqrt[T^f]{(1+r)^{T^f}} - 1 = \sqrt[T^g]{(1+r)^{T^g}} - 1 = \sqrt[T^i]{(1+r)^{T^i}} - 1 = \\ &= \sqrt[T^{t, g}]{(1+r)^{T^{t, g}}} - 1 = \sqrt[T^f]{(1+r)^{T^f}} - 1 = \text{ stb.} \end{aligned}$$

Ezen összefüggések behatóbb elemzésétől azonban itt és a továbbiakban is eltekintünk.

Hogyan számíthatók ki a gazdasági események un. stabil korfái? Láttuk, hogy egy stabil népességet egy halandósági tábla és a természetes szaporodás arányszáma (r) már kielégítően meghatároz. Tetszőleges gyökű, illetve az élveszületések tényleges számával azonos gyökű gazdasági halandósági táblák, illetve stacionér gazdasági korfák az r megfelelő értékeinek a birtokában könnyen átalakíthatók stabil gazdasági korpiramisokká. Az egyes korévek népességének a termelése például a:

$$P_{t, x} \cdot (1+r)^{-x} = P_{t, x} \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right)^x$$

formula segítségével számítható ki, melyben $P_{t, x}$ az alapulvett stacionér népességben az x -éves korúaknak a termelését, r pedig a stabil népesség intrinszc szaporodási, ill. fogyasztási arányszámát jelenti. A stabil népesség össztermelése az egyes korcsoportok termelésének az összegezése útján határozható meg stb. Hasonló módon számíthatók ki a többi gazdasági események stabil korfái is.

Hogyan határozható meg valamely stabil népességben, a gazdasági események korszpecifikus intenzitásainak, illetve nagyságainak a változatlansága esetén a gazdasági események x -évesek által produkált mennyiségének a vonatkozó események azonos időszak alatt produkált össztermeléséhez viszonyított aránya ($c_{\text{gazd., x}}$) ?

$$\begin{aligned}
c_{\text{gazd., } x} &= \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}}}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}}} \cdot \\
&\cdot \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}} = \\
&= \frac{P_{\text{gazd., } b}}{\sum_{x=0}^{\omega} P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}} \cdot \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}} \\
&= b_{\text{gazd.}} \cdot \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}}.
\end{aligned}$$

Míthogy $\sum_{x=0}^{\omega} c_{\text{gazd., } x} = 1$, megállapítható, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} b_{\text{gazd.}} \cdot \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}} = 1.$$

$$b_{\text{gazd.}} \sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}} = 1,$$

ahonnan

$$b_{\text{gazd.}} = \frac{1}{\sum_{x=0}^{\omega} \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}}},$$

ami - mint láttuk - a valamely gazdasági eseményt produkálók közé évente újonnan belépők gazdasági teljesítményeinek és a vonatkozó gazdasági esemény adott évi összmenyiségének az arányát mutatja.

Könnyen belátható továbbá, hogy

$$\begin{aligned}
c_{\text{gazd., } x} \cdot P_{\text{gazd.}} &= b_{\text{gazd.}} \cdot P_{\text{gazd.}} \cdot \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}} \\
&= P_{\text{gazd., } b} \cdot \frac{P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x}}{P_{\text{gazd., } b}} = P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x};
\end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} c_{\text{gazd., } x} \cdot P_{\text{gazd.}} = \sum_{x=0}^{\omega} P_{\text{gazd., } x} (1+r)^{-x},$$

$$\text{így} \quad \frac{\sum_{x=0}^{\omega} P_{\text{gazd.}, x} (1+r)^{-x}}{\sum_{x=0}^{\omega} c_{\text{gazd.}, x} \cdot P_{\text{gazd.}}} = \frac{P_{\text{gazd.}}}{P_{\text{gazd.}}} = 1,$$

aminek azonban kizárólag formálisan, a vonatkozó számítások helyességének az ellenőrzése szempontjából van jelentősége.

Az un. stabil gazdasági korfák - mint jeleztük - annak a tisztázását teszik lehetővé, hogy milyen lenne bizonyos hosszabb idő eltelte után a gazdasági események valamely időszak alatti volumenének a népesség számához viszonyított nagysága, a növekedési üteme, a "kormegoszlása" stb. a termelékenység és halandóság korszpecifikus jellemzőinek, valamint a gazdasági események korszpecifikus intenzitásainak, ill. nagyságainak az állandósulása esetén. A stabil gazdasági korfák tehát elsősorban e tényezők feltételezett változatlanosága gazdasági következményeinek a kitapintását teszik lehetővé, s ezzel a céllal többek közt a tényleges és a stacionér gazdasági korfákkal is egybevetethetők. A jövőben kialakuló tényleges gazdasági korfák meghatározása szempontjából jelentőségük - a stacionér gazdasági korfákéhoz hasonlóan - erősen korlátozott. Ezekkel kapcsolatban is idézhető John Hajnal megállapítása: "Hosszu távon megítélni a jövőben várható népességfejlődést egy adott év körülményei fennmaradásának a feltételezésével, vagyis olyan arányszámok alapulvételével, melyekről biztosan tudjuk, hogy nem maradnak változatlanok, nyilvánvalóan értelmetlen eljárás" (30). Magyarország népessége - mint ismeretes - nincs a stabilitás állapotában és nem is tételezhető fel, hogy a termékenység és a halandóság korszpecifikus jellemzői a jövőben hosszú időn keresztül változatlanok maradnak, vagyis, hogy a stabilitás állapotának az elérése bekövetkezik.

Nem tételezhető fel a gazdasági események korszpecifikus intenzitásainak, ill. nagyságainak az állandósulása sem. Az un. stabil gazdasági korfák mégis alkalmasak arra, hogy egyfajta ítéletet alkossunk az alapul vett (jelenlegi) termékenységi, halandósági és gazdasági viszonyokról.

9. A bemutatott összefüggések illusztrálása a halandósági szint, a termékenységi szint és a gazdasági aktivitás, illetve inaktivitás korszpecifikus arányszámai állandósulása esetén kialakuló hipotetikus stabil populációk és szubpopulációk alapulvételével

Az alábbiakban a bemutatott összefüggések közül néhányat konkrétan is illusztrálunk a férfi és a női népesség 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi magyarországi halandósági táblájának, a női népesség vonatkozó általános korszpecifikus termékenységi arányszámainak, valamint a férfi és a női népesség vonatkozó hazai népszámlálásaink eredményei alapján becsülhető korcsoportonkénti gazdasági aktivitási, illetve inaktivitási arányszámainak az alapulvételével végzett számításaink alapján. A szóban forgó összefügg-

gések a férfi és a női népességre vonatkozóan ebben az esetben is érvényesek külön-külön is; a mindkét nembeli népességre vonatkozó eredmények a korábbiakban ismertetett és szemléltetett összesülőzési módszerekkel lennének előállíthatók. A felhasznált halandósági táblák ugyanazok voltak, mint az előző fejezet 8. pontjában szereplő 3.4. táblának a három utolsó halandósági táblája. A természetes szaporodás intrinszc arányszámának az értéke az 1948-1949. évi adatok alapján becsülve

- 2,30 ‰-et, az 1959-1960. évi adatok alapján becsülve
- 2,99 ‰-et, az 1969-1970. évi adatok alapján becsülve pedig
- 3,02 ‰-et tesz ki. Ennek megfelelően a k tényező értéke az 1948-1949. évi adatok alapján:

$$k = \frac{1}{1,00230} = 0,9976736,$$

az 1959-1960. évi adatok alapján:

$$k = \frac{1}{0,99701} = 1,0029989,$$

az 1969-1970. évi adatok alapján pedig

$$k = \frac{1}{0,99698} = 1,0030291.$$

Mint ahogy ebben az esetben is korcsoportokra összevont halandósági táblák felhasználására kényszerültünk, a 4.5. táblában szereplő becslési eredményeink kevésbé pontosak, mint a gazdasági aktivitás (ill. inaktivitás) kor-specifikus arányszámok koréves részletezésű értékei birtokában minden egyéb felhasznált mutató koréves részletezésű értékei felhasználásával végzett számítások esetében lehetnek volna. A 4.5. táblában szereplő mutatók a 3.4. táblában szereplő mutatóknak a k^x tényező felhasználásával módosított változatai, a közöttük fennálló összefüggések tehát részben azonosak a 3.4. tábla mutatói között fennálló összefüggésekkel. A koréves részletezésű számítások során használt jelöléseket használva megállapíthatjuk azonban, hogy stabil növekvő, illetve csökkenő népességekről lévén szó

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) k^x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_{g,x} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) k^x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_{i,x} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+n}}{2} \right) k^x,$$

4.5. A stabil össznépességre, valamint a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív stabil három második világháború utáni halandósági táblája, valamint az általános termékenység

Sor- szám	A halandósági tábla és a figyelembe vett intrinsic szaporodási arányok, valamint gazdasági aktivitási (ill. inaktivi- tási) arányszámok évének megnevezése		A férfi népesség	A női népesség
			1948-1949. évi	
			halandósági táblája, intrinsic szaporodási	
1.	$\sum_{x=0}^{\omega} {}_n L_x k^x$	(fő, ill. év)	5 419 992,7	5 814 322,2
2.	$\sum_{x=0}^{\omega} {}_n L_{g,x} k^x$	(fő, ill. év)	3 581 187,6	1 386 963,4
3.	$\sum_{x=0}^{\omega} {}_n L_{i,x} k^x$	(fő, ill. év)	1 838 805,1	4 427 358,7
4.	$\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) {}_n L_x k^x \right]$	(év)	187 524 746,6	209 348 502,6
5.	$\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) {}_n L_{g,x} k^x \right]$	(év)	145 304 882,6	51 950 529,6
6.	$\sum_{x=0}^{\omega} \left[\left(x + \frac{n}{2} \right) {}_n L_{i,x} k^x \right]$	(év)	42 219 864,0	157 397 973,0
7.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{x'}^{o'} {}_n L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_x + T_{x+n})}{2} \right] k^x$	(év)	198 604 807,7	222 159 839,2
8.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} {}_n L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2} \right] k^x$	(év)	153 545 354,6	54 799 477,6
9.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} {}_n L_x k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2} \right] k^x$	(év)	45 059 453,2	167 360 361,6
10.	$\sum_{x=0}^{\omega} g_x {}_n L_x k^x$	(év)	106 850 253,0	48 063 585,9
11.	$\sum_{x=0}^{\omega} i_x {}_n L_x k^x$	(év)	80 674 493,6	161 284 916,7
12.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{x'}^{o'} {}_n L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{n(T_x + T_{x+n})}{2} g_x k^x$	(év)	112 029 558,9	50 699 480,1
13.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{x'}^{o'} {}_n L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{n(T_x + T_{x+n})}{2} i_x k^x$	(év)	86 575 248,8	171 460 359,1
14.	$\sum_{x=0}^{\omega} g_x {}_n L_{g,x} k^x$	(év)	85 395 128,2	12 014 322,2
15.	$\sum_{x=0}^{\omega} i_x {}_n L_{i,x} k^x$	(év)	20 764 739,5	121 348 709,6
16.	$\sum_{x=0}^{\omega} i_x {}_n L_{g,x} k^x$	(év)	59 909 754,1	39 936 207,1

szubpopulációkra vonatkozó néhány becslési eredmény Magyarország férfi és női népessége és a gazdasági aktivitás (ill. inaktivitás) vonatkozó korszecifikus arányszámai alapján

A férfi népesség	A női népesség	A férfi népesség	A női népesség	Sor-szám
1959 - 1960. évi		1969 – 1970. évi		
aránya és a korszecifikus gazdasági aktivitási (ill. inaktivitási) arányszámai alapján				
7 270 724,1	7 779 539,4	7 426 385,7	8 107 701,3	1.
4 990 837,9	2 555 821,8	4 375 885,3	2 986 905,0	2.
2 279 886,2	5 243 717,6	3 050 510,4	5 120 796,3	3.
274 891 629,6	308 307 598,1	280 475 070,3	325 256 088,8	4.
209 504 314,5	102 691 960,4	177 572 248,2	114 201 666,0	5.
65 387 315,1	205 615 637,7	102 902 822,1	211 054 422,8	6.
255 161 774,5	285 362 824,8	260 183 978,7	300 545 108,5	7.
195 255 796,2	95 932 143,6	165 991 164,4	107 138 487,8	8.
59 905 978,3	189 430 681,2	94 192 814,3	193 406 620,7	9.
163 517 631,6	96 394 422,0	147 497 352,6	121 144 414,1	10.
111 373 998,0	211 913 176,1	132 977 717,7	204 111 674,7	11.
153 781 343,6	90 148 246,2	138 701 900,3	113 070 352,9	12.
101 380 430,9	195 214 578,6	121 482 078,4	187 474 755,6	13.
126 797 614,2	32 283 438,3	94 657 852,1	42 910 471,5	14.
28 667 297,6	141 504 654,5	50 063 321,8	132 820 480,1	15.
82 706 700,4	70 408 521,6	82 914 395,9	71 291 194,6	16.

4.5. A stabil össznépessegre, valamint a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív stabil három második világháború utáni halandósági táblája, valamint az általános termékenység

Sor- szám	A halandósági tábla és a figyelembe vett intrinszc szaporodási arányok, valamint gazdasági aktivitási (ill. inaktivi- tási) arányszámok évének megnevezése	A férfi népesség	A női népesség
		1948-1949. évi	
		halandósági táblája, intrinszc szaporodási	
17.	$\sum_{x=0}^{\omega} g_{x,n} L_{i,x} k^x$ (év)	21 455 124,8	36 049 263,7
18.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} n L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2} \right] g_{x,n} k^x$ (év)	89 036 027,9	12 566 988,5
19.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} n L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2} \right] i_{x,n} k^x$ (év)	22 065 921,1	129 227 869,9
20.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} n L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2} \right] i_{x,n} k^x$ (év)	64 509 327,1	42 232 489,2
21.	$\sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} n L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left[\frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2} \right] g_{x,n} k^x$ (év)	22 993 531,6	38 132 491,6
22.	$\sum_{x=a}^b g_{x,n} L_{g,x} k^x$ (év)	106 913 643,7	32 533 042,2
23.	$\sum_{x=a}^b e_{g,x}^{o'} n L_{g,x} k^x = \sum_{x=a}^b \left[\frac{n(T_{g,x} + T_{g,x+n})}{2} \right] k^x$ (év)	99 290 725,7	33 936 861,9
24.	$\sum_{x=a}^b i_{x,n} L_{i,x} k^x$ (év)	42 219 864,0	157 397 973,0
25.	$\sum_{x=a}^b e_{i,x}^{o'} n L_{i,x} k^x = \sum_{x=a}^b \left[\frac{n(T_{i,x} + T_{i,x+n})}{2} \right] k^x$ (év)	45 059 453,3	165 360 361,9
26.	$\bar{a}_{r \approx 0} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(x + \frac{n}{2}) n L_x k^x \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} n L_x k^x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \approx 0, x}$ (év)	34,60	36,01
27.	$\bar{a}_{r \approx 0, g} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(x + \frac{n}{2}) n L_{g,x} k^x \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} n L_{g,x} k^x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \approx 0, g}$ (év)	40,57	37,46
28.	$\bar{a}_{r \approx 0, i} = \frac{\sum_{x=0}^{\omega} \left[(x + \frac{n}{2}) n L_{i,x} k^x \right]}{\sum_{x=0}^{\omega} n L_{i,x} k^x} = \sum_{x=0}^{\omega} x \alpha_{r \approx 0, i}$ (év)	22,96	35,55

Megjegyzés: A számításokhoz felhasznált adatok a már idézett halandósági táblák vonatkozó adatain kívül az általános korszpecifikus termékenységi arányszámoknak a KSH demográfiai évkönyveiben publikált adataiból becsült értékei, valamint az 1960. évi és az 1970. évi magyarországi népszámlálási publikációknak a gazdasági aktivitásra (ill. inaktivitásra) vonatkozó, a korábbi népszámlálásokra vonatkozóan is megadott korszpecifikus arányszámai voltak.

szubpopulációkra vonatkozó néhány becslési eredmény Magyarország férfi és női népessége és a gazdasági aktivitás (ill. inaktivitás) vonatkozó korszecifikus arányszámái alapján (folytatás)

A férfi népesség	A női népesség	A férfi népesség	A női népesség	Sor-szám
1959 - 1960. évi		1969 - 1970. évi		
aránya és a korszecifikus gazdasági aktivitási (ill. inaktivitási) arányszámai alapján				
36 720 017,4	64 110 983,7	52 839 500,5	78 233 942,6	17.
120 198 206,1	30 607 631,4	90 243 083,6	40 982 691,1	18.
26 322 839,9	129 890 066,3	45 733 997,4	121 318 958,6	19.
75 057 590,2	65 324 512,1	75 748 080,9	66 155 797,0	20.
33 583 138,3	59 540 615,0	48 458 816,8	72 087 661,8	21.
139 632 583,6	66 910 455,3	112 318 487,7	72 384 995,4	22.
132 256 784,6	63 497 404,6	110 587 488,0	69 054 440,6	23.
65 387 315,1	205 615 637,7	102 902 882,1	211 054 422,8	24.
59 905 978,1	189 430 680,8	94 192 814,0	193 406 620,3	25.
37,81	39,63	37,77	40,12	26.
41,98	40,18	40,58	38,23	27.
28,68	39,21	33,73	41,22	28.

továbbá, hogy:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x &= \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x k^x + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x k^x \neq \\ &\neq \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} k^x \right) = \\ &= \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_x k^x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_x k^x \right], \end{aligned}$$

mert bár

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_x k^x$$

és

$$\sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_x k^x,$$

figyelembe kell vennünk, hogy

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_x k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) g_x k^x$$

és

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_x k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_x^{o'} L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_x + T_{x+1}}{2} \right) i_x k^x.$$

Megállapíthatjuk azt is, hogy bár

$$\begin{aligned} \sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x &= \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} k^x + \\ &+ \sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} k^x, \end{aligned}$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} x L_x k^x \neq \left(\sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} k^x + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} k^x \Big) = \\
& = \left[\sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} k^x + \right. \\
& \left. + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{,x} k^x + \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_{,x} k^x \right].
\end{aligned}$$

Az azonos sorszámú összeadandók közötti egyenlőség esete ugyanis csak a két utolsó sor esetében forog fenn, egyébként:

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{g,x} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) g_{,x} k^x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{i,x} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) i_{,x} k^x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} i_x L_{g,x} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_{g,x}^{o'} L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{g,x} + T_{g,x+1}}{2} \right) i_{,x} k^x$$

$$\sum_{x=0}^{\omega} g_x L_{i,x} k^x \neq \sum_{x=0}^{\omega} e_{i,x}^{o'} L_{g,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} \left(\frac{T_{i,x} + T_{i,x+1}}{2} \right) g_{,x} k^x$$

Kitűnik az is, hogy:

$$\sum_{x=a}^b g_x L_{g,x} k^x \neq \sum_{x=a}^b e_{g,x}^{o'} L_{g,x} k^x$$

és

$$\sum_{x=a}^b i_x L_{i,x} k^x \neq \sum_{x=a}^b e_{i,x}^{o'} L_{i,x} k^x,$$

bár továbbra is fennáll, hogy

$$\sum_{x=a}^b \frac{1}{x} L_{i,x} k^x = \sum_{x=0}^{\omega} x L_{i,x} k^x .$$

Adatokkal is illusztrált fenti megállapításainkat korábbi fejtegetéseink során csak részben, pontosabban csak a stabil növekvő (illetve csökkenő) férfi, illetve női össznépességre vonatkozóan magyaráztuk meg, a gazdaságilag aktív és inaktív szubpopulációk, illetve élettartamok vonatkozásában adható magyarázat azonban korábbi fejtegetéseink szellemében, azok analógiájára vonatkozólag könnyen megalkotható.

ZÁRÓ MEGJEGYZÉSEK

Fejtegetéseink során alaptémánkhoz hűen elsősorban a stabil populációk és szubpopulációk demográfiai, valamint demográfiai és gazdasági jellemzői közötti kapcsolatokat vizsgáltuk és ennek során megfogalmaztuk a stabil populációk és szubpopulációk néhány, mindeztideig feltáratlan sajátosságát is. Ezzel kapcsolatban azonban szükségesnek tartjuk hangsúlyozni, hogy a különféle népmozgalmi, gazdasági stb. események, valamint a különféle szubpopulációk stabil (illetve stacionér) jellegének az elméleti vizsgálódásaink alapját képező feltételezése csupán az elméletileg lehetséges feltételezések egyike, igen termékeny vizsgálatok lennének végezhetők ama feltételezés alapján is, hogy az össznépesség stabil (illetve stacionér), az események, illetve alnépességek viszont nem azok és fordítva. Az események és alnépességek korszpecifikus gyakoriságainak, illetve arányszámainak a feltételezése tehát csupán a lehetséges absztrakciók egyike.

Elemzéseinkben a stabil népesség specifikus esetét képező stacionér népességgel és alnépességekkel behatóbban foglalkoztunk, mint a stabil növekvő, illetve csökkenő népességekkel és alnépességekkel. A stacionér modell egyszerűségén túlmenően ennek fő oka a stacionér népesség koncepciójának vizsgálatok által is megalapozott (10, 11, 29, 45) népességpolitikai aktualitásában rejlik. A stacionér népesség mint ideál már Platon (i. e. 380-370, majd 340 körüli) és Arisztotelész (i. e. 354 körüli) írásaiban, valamint Morus Tamás 1516-ban kiadott "Utópiájában" is felbukkan; napjainkban G. Bouthoul (77), W. Brand (78), L. Buquet (79), L. Robbins (80), J.J. Spengler (81), W.S. Thompson (82), D.J. Bogue (83), a szocialista országok demográfusai közül: Sz. Sztrumilin (84) és E. Rosset (85) vallják magukénak ezt az ideált. Megjegyezzük, hogy stacionér népességen a legtöbb szerző egyszerűen változatlan létszámú népességet ért és elérését a népesség növekedési ütemének a csökkentése, illetve végül is: teljes megszüntetése útján tekinti elérhetőnek.

Ismeretes, hogy azokkal a törekvésekkel kapcsolatban, melyek a népességpolitikát valamely szabályos strukturájú, vagyis stabil, illetve stacionér népesség elérésének az eszközök közül kívánták felhasználni, számos ellenvetés hangzott el. A legfigyelemreméltóbb ezek

közül J. Bourgeois-Pichatnak és S.A. Talebnek a zérus szaporodási ütemű népesség koncepciójáról írott kritikai jellegű tanulmánya (86), mely az ilyen népesség elérése során felmerülő demográfiai helyzetek buktatóit és fonákságait, valamint a kitűzött cél elérésének a gyakorlati lehetetlenségét olyan meggyőzően mutatta be, hogy ezáltal szinte megteremtette a koncepció elvetőinek népes és rangos táborát (87, 88). Ennek az ellenáramlatnak egy sajátos képviselője S. Vanistendael is, aki a népességi optimum kutatásának gyakorlati népességgpolitikai jelentőségét általánosságban véve is kétségbe vonja. Elutasító álláspontját a népesezési folyamatok inerciájára, valamint a távolabbi jövőben kialakuló gazdasági, szociális és technológiai trendekre vonatkozó ismereteinknek a hiányára való hivatkozással indokolja (89). A népességi optimum s ennek keretein belül az optimális stabil népességek vizsgálatának, meghatározásának természetesen nemcsak a gyakorlati népességgpolitikának a megalapozása szempontjából van jelentősége. Ha a különböző ismérvek szempontjából optimálisnak talált népességtípusok közül, a népesezési folyamatok jelentős inerciája miatt, gyakorlatilag egyik sem érhető el tiszta formában, annak az ismerete, hogy a különböző ismérvek szempontjából optimális népességektől a tényleges fejlődés során kialakuló népesség mennyiben tér el, mindig nagy jelentősége lesz. S bár az is igaz, hogy valamely szabályos korösszetételű népességnek az eléréséhez csupán elméletileg is rendkívül nehéz ut vezet, igaz marad továbbra is, hogy a szabálytalan korösszetétel permanenssé válása melletti népességfejlődés sem jár együtt kisebb nehézségekkel. Éppen ennek a felismerése alapján tekintjük a korösszetétel egyenetlenségeinek a fokozatos megszüntetését hazai népességgpolitikánk egyik célkitűzésének (90).

A stabil népesség elmélete napjainkban is rohamosan, évről évre jelentős új eredményeket adóan fejlődik. Számos kutató foglalkozik a stabilizálódási és destabilizálódási folyamatok vizsgálatával, a stabil népességi modell gyakorlati felhasználási lehetőségeinek ki szélesítésével stb. Figyelmet érdemel az a kutatás irány is, amelyik azt vizsgálja, hogyan lehet valamely adott halandósági táblához olyan korszecifikus termékenységi arányszámokat hozzárendelni, melyek egy eleve megadott növekedési aránynak, illetve népességstrukturának az elérését biztosítják (91). Bizonyos szempontból és mértékig ez utóbbival tekinthető analóg jellegűnek ezen értekezés szerzőjének az a gazdaságdemográfiai természetű kutatási témája, hogy miként lehet a gazdasági események korszecifikus intenzitásait, illetve nagyságait úgy megválasztani, illetve meghatározni, hogy azok valamely adott halandóságu és növekedési rátájú stabil népességben a vonatkozó események olyan egy főre jutó évi nagyságait biztosítsák, melyek valamely azonos halandóságu, de eltérő növekedési rátájú stabil népességben ezen események eredeti korszecifikus intenzitásai, illetve nagyságai esetében alakultak ki (45, 92).

A felmerülő témák és problémák, a már kialakult és az éppen kialakulóban lévő kutatási irányok valóban számosak és sokrétűek. Ez az értekezés a népességtudomány egyik ilyen gyorsan fejlődő kutatási területéhez kíván tehát szerény hozzájárulás lenni.

IRODALOM

- (1) Szerk.: Dr. Szabady Egon: Bevezetés a demográfiába. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1963. 610 p.
- (2) Dr. Vincze István: Megjegyzések a népesség számszerű alakulásának vizsgálatához. Demográfia, 1963. évi 2. sz. 217-230. p.
- (3) Tekse Kálmán: Bevezetés a stabil népesség elméletébe. Statisztikai Kiadó Vállalat, Budapest, 1975. 224 p.
- (4) Dr. Szabady, E.: Magyarország népességének gazdasági halandósági alaptáblái. Az Amerikai Demográfiai Társaság 1967. évi áprilisi közgyűlésén megvitatott tanulmány.
- (5) Valkovics, E.: Magyarország népességének termelési és fogyasztási korpiramisa. Demográfia, 1966. évi 3. sz. 289-317. p.
- (6) Valkovics, E.: Magyarország népességének gazdasági korfái. A KSH Népességtudományi Kutató Csoportja közleményei. N^o 17, Budapest, 1967/3. 111 p.
- (7) Valkovics, E.: Some lessons drawn from the constructing of economic age pyramids of the population. In: World views of population problems. (Ed. by E. Szabady.) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. 423-434. p.
- (8) Valkovics, E.: Magyarország népességének származtatott gazdasági halandósági táblái. Demográfia, 1966. évi 4. sz. 507-526. p.
- (9) Valkovics, E.: Az átlagos élettartam meghosszabbodásának gazdasági következményei. Demográfia, 1970. évi 3. sz. 212-241. p.
- (10) Valkovics, E.: Népességgazdasági célkitűzések kialakításának néhány módszertani vonatkozása. Demográfia, 1972. évi 3-4. sz. 365-401. p.
- (11) Valkovics, E.: Gazdaságdemográfiai módszerek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1973. 482 p.
- (12) Pressat, R.: Principes d'analyse. Éditions de l'Institut National d'Études Démographiques, 1966, 92. p., 153 p.
- (13) Pressat, R.: L'analyse démographique. Méthodes, résultats, applications. Deuxième édition entièrement refondue. P.U.F. 1969. 231. p., 321 p.
- (14) Euler, L.: Recherches générales sur la mortalité et la multiplication du genre humain. In: Histoire de l'Académie Royal des Sciences et Belles Lettres, 1760, 144-164. p.
- (15) Lotka, A.J.: Relation between Birth Rates and Death Rates. Science, N. S. Vol. 26(1907), N^o 635, 21-22. p.
- (16) Sharpe, F.R. - Lotka, A.J.: A Problem in Age-Distribution. Philosophical Magazine. April 1911, 435-438. p.
- (17) Lotka, A.J.: Elements of physical biology. Baltimore, 1925.

- (18) Lotka, A.J. : Théorie analytique des associations biologiques. Paris, Hermann et Cie, 1939.
- (19) Bortkiewicz, L. : Die Sterbeziffer und der Frauenüberschuss in der Stationären und in der Progressiven Bevölkerung, zugleich ein Beitrag zur Frage der Berechnung der "Verlebten Zeit". Bulletin de l'Institut International de Statistique, 1911, vol. XIX, Part II, 63-138. p.
- (20) Halley, E. : An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind. In: Philosophical Transaction of the Royal Society, vol. 17. 1693.
- (21) Pressat, R. : Pratique de la démographie. Trente sujets d'analyse. Dunod, Paris, 1967, 301 p.
- (22) Dr. Szabady, E. : Basic fertility tables of some East-European socialist countries. In: World views of population problems (Ed. by E. Szabady), Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. 387-408. p., 447.p.
- (23) Dr. Vukovich Gy. : A reprodukció elemzésének néhány kérdése. In: World views of population problems. (Ed. by E. Szabady) Akadémiai Kiadó, Budapest, 1968. 435-444. p.
- (24) Wolfenden, H.H. : Population Statistics and Their Compilation. Revised Edition, Chicago, 1954. 217. p.
- (25) Holzer, J. Z. : Model ludności ustabilizowanej. SGPIS, Warszawa, 1969, 119 p.
- (26) Coale, A.J. - Demeny, P. : Regional Model Life Tables and Stable Populations. Princeton University Press, Princeton, N.Y., 1966, 872 p.
- (27) Dr. Barsy, Gy. - Dr. Theiss, E. : A stabil népességi modell. In: Bevezetés a demográfiába. (Szerk. : Dr. Szabady Egon) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1963.
- (28) Dr. Theiss, E. : A reprodukciós és termékenységi modellek továbbfejlesztése. In: Bevezetés a demográfiába. (Szerk. : Dr. Szabady Egon) Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1963, 610 p.
- (29) Valkovics, E. : A gazdaságdemográfiai elemzés elvei és módszerei. Tankönyvkiadó, Budapest, 1976. 378 p.
- (30) Hajnal, J. : Analysis of Birth Statistics in the light of the recent International Recovery of the Birth Rate. Population Studies, Vol. I., N^o. 2. 137-164. p.
- (31) Vincent, P. : Potentiel d'accroissement d'une population. Journal de la Société de Statistique de Paris, 1945. évi 1-2. sz.
- (32) Hofsten, E. : Growth Potential in a Stationary Population. Statistisk Tidskrift, 1972. évi 3. sz., 192-199. p.
- (33) Depoid, P. : Reproduction nette en Europe depuis l'origine des statistiques de l'état civil. Statistique générale de la France, Études démographiques N^o 1., Paris 1941, 42 p.
- (34) Henry, L. : Réflexions sur les taux de reproduction. Population, 1965. évi 1. sz. 53-69. p.
- (35) Bourgeois-Pichat, J. : Commentaire sur l'article de Louis Henry. Population, 1965. évi 1. sz. 70-76. p.
- (36) Dr. Acsádi Gy. - Dr. Nemeskéri J. : History of Human Life Span and Mortality. Akadémiai Kiadó, 1970.

- (37) Henry L. : Démographie. Analyse et modèles. Librairie Larousse, 1972. 239-241. p., 265-268. p., 341 p.
- (38) Coale, A.J. - Demény, P. : Méthodes permettant d'estimer les mesures démographiques fondamentales à partir des données incomplètes. N.V. Études démographiques N° 42, New York, 1969, 135 p.
- (39) Coale, A.J. : The Growth and Structure of Human Populations. A Mathematical Investigation. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1972, 227 p.
- (40) Bourgeois-Pichat, J. : Utilisation de la notion de population stable pour mesurer la mortalité et la fécondité des populations des pays sous développés. Bulletin de l'Institut International de Statistique, 1958. évi 2. sz. 94-121. p.
- (41) Bourgeois-Pichat, J. : The Concept of a Stable Population. U.N. Population Studies, N° 39, New York, 1968, 237 p.
- (42) Winkler, W. : Demometrie. Duncker et Humblot, Berlin, 1969, 342-426.p., 447 p.
- (43) Abou Gamrah, H. : Etimations des paramètres d'une population quasi-stable: facteurs correctifs tenant compte de la baisse de la mortalité. Population et Famille, 1973. évi 2. sz., 37-50. p.
- (44) Wunsch, G. : Le délai entre le déclin de la mortalité et celui de la fécondité. Quelques résultats tirés d'un modèle de transition démographique, Population et Famille, 1973. évi 2. sz., 51-62. p.
- (45) Valkovics, E. : A gazdasági korfák módszertani apparátusának felhasználása optimális stabil népességek meghatározására. A KSH Népességtudományi Kutató Intézetének 41.sz. közleménye, Budapest, 1974, 216 p.
- (46) Ryder, N.B. : Notes on Stationary Populations. Population Index, 1975. évi 1. sz. (Vol. 41, N° 1), 3-28. p.
- (47) Valkovics, E. : Népmozgalmi jelenségek transzverzális és longitudinális elemzésének kapcsolatáról. Demográfia, 1975. évi 1. sz. 37-65. p.
- (48) Valkovics, E. : Népmozgalmi jelenségek táblamódszerű elemzésének néhány kérdése. Demográfia, 1974. évi 1. sz., 74-101. p.
- (49) Pallós, E. : Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig. A KSH Népességtudományi Kutató Intézetének 34. sz. kiadványa. Budapest, 1971, 220 p.
- Pallós, E. : Magyarország népességének 1969-1970. évi halandósági táblája, 6 p., (Kézirat)
- (50) Dr. Barsy, Gy. : Halandósági táblák. In.: Szerk.: Dr. Szabady Egon: Bevezetés a demográfiába. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1964. 371-392. p., 610 p.
- (51) Dr. Marton, Z. - Pallós, E. : A halandóság alakulása, halálokok. Demográfia, 1975. évi 2-3. sz. 223-241. p.
- (52) Lyerly, S.B. : The contraharmonie mean. American Statistician, 28 (4): 162-163.
- (53) Hersch, L. : De la démographie actuelle à la démographie potentielle. Librairie de l'Université, Genève, 1944.
- (54) Vielrose, E. : Zarys demografii potencjalnej. P.W.N., Warszawa, 1958, 252 p.
- (55) Bourgeois-Pichat, J. : Les limites de la démographie potentielle. Revue de l'Institut International de Statistique, 1951. évi 1. sz. 13-27. p.

- (56) Le Bras, H. : Lois de mortalité et âge limite. Population, 1976. évi 3. sz., 655-692. p.
- (57) Keyfitz, N. - Flieger, W. : World Population. An Analysis of Vital Data. The Chicago University Press, Chicago, 1968, 9-10. p., 672 p.
- (58) Vallin, J. : La mortalité par génération en France, depuis 1899, I.N.E.D. Travaux et Documents, Cahier n° 63, P.U.F., Paris, 1973, 483 p.
- (59) Theiss, E. : A népesedés mechanizmusának vizsgálata. In: Szerk.: dr. Szabady Egon: Bevezetés a demográfiába. Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1964, 480-499. p., 610 p.
- (60) Brass, W. - Hill, K. : Estimating adult mortality from orphanhood. Proceedings of the International Population Conference, Volume 3, I.U.S.S.P., Liège, 1973, 111-123. p.
- (61) Wunsch, G. : Une méthode d'estimation de tables intercensitaires de mortalité régionales. Population et Famille, 1972, N° 26-27, 109-118. p.
- (62) Duchêne, J. : Ajustement des tables de mortalité du moment par les lois de Gompertz et de Makeham. Un essai de comparaison. Population et Famille, 37, (1976-1), 37-75. p.
- (63) Henry, L. : Mesure indirecte de la mortalité des adultes. Population, 1960. évi 3. sz., 457-466. p.
- (64) Ledermann, S. : Nouvelles tables-types de mortalité, I.N.E.D., Travaux et Documents, Cahier N° 53, Paris, 1969, 260 p. + 13 melléklet.
- (65) Page, H.J. - Wunsch, G. : Parental Survival Data: Some Results of the Application of Ledermann's Model Life Tables. Population Studies, 1976. évi 1. sz. 59-76. p.
- (66) Keyfitz, N. - Golini, A. : Mortality Comparisons: The Male-Female Ratio. Genus, Vol. XXXI, n° 1-4, 1975, 1-34. p.
- (67) Henry, L. : Leçons d'analyse démographique. Paris, Centre de documentation universitaire, 1960 et 1964.
- (68) Henry, L. : Réflexions sur l'observation en démographie. Population, 1963. évi 2. sz. 233-262. p.
- (69) Henry, L. : Analyse et mesure des phénomènes démographiques par cohortes. Population, 1966. évi 3. sz. 465-482. p.
- (70) Henry, L. : A modern demográfia problémái: a megfigyelés és a nyelvezet. Demográfia, 1967. évi 2. sz. 152-161. p.
- (71) Henry, L. : A termékenység megfigyelésének és elemzésének fejlődése. Demográfia, 1969. évi 1-2. sz. 9-21. p.
- (72) Pressat, R. : A demográfia oktatásának új koncepciója. (Bevezetés a kvantitatív módszerekbe) Demográfia, 1963. évi 1. sz. 7-29. p.
- (73) Pressat, R. : A születési arányszám rövidtávú változásainak magyarázata. Demográfia, 1968. évi 2. sz. 222-230. p.
- (74) Pressat, R. : Signification des mesures de la fécondité du moment. Az 1968. szeptember 25-30. között Várnában megtartott Nemzetközi Demográfiai Symposionra benyújtott tanulmány.

- (75) Durand, J.D. - Miller A.R. : Process of Growth and structural Change of the Labor Force under Pressure of Expanding Population. A Nemzetközi Népeségtudományi Unió 1969. szeptember 3-11. között Londonban megtartott kongresszusára benyújtott tanulmány.
- (76) Ryder, N.B. : The Structure and Tempo of Current Fertility. In: Demographic and Economic Change in Developed Countries. Princeton University Press, Princeton, 1960. 117-136. P. 536 p.
- (77) Bouthoul, G. : La surpopulation. Petit Bibliotheque Payot, Paris, 1964. 133. p., 250 p.
- (78) Brand, W. : The World Population Problem. International Population Conference, Wien, 1959. 32 p.
- (79) Buquet, L. : L'optimum de population, P.U.F., 1956, 265 p.
- (80) Robbins, L. : Notes on some probable consequences of the advent of stationary population in Great Britain, Economics, 1929. évi áprilisi szám.
- (81) Spengler, J.J. : Population Movements and Economic Equilibrium in the United States. Journal of Political Economy, 1940. évi áprilisi szám, 159 p.
- (82) Thompson, W.S. : Population Problemes. Third Edition. Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York - London, 1942.
- (83) Bogue, D.J. : Principles of Demography. John Wiley et Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto, 1969.
- (84) Sztumilin, Sz. : V kozmosze na zemlje, Novoje Vremja, 1961. évi 7. sz., 32-34. p.
- (85) Dr. Rosset, E. : Zasady perspektywicznej polityky ludnosciowej, P.A.N., Warszawa, 1961, 34-36. p.
- (86) Bourgeois-Pichat, J. - Taleb, S.A. : Un taux d'accroissement nul pour les pays en voie de développement en l'an 2000. Revu ou réalité? Population, 1970. évi 5.sz. 957-974.p.
- (87) Le Bras, H. : Ly mythe de la population stationnaire. Prospectives, 1974. évi 3.sz., 73-94. p.
- (88) Wander, H. : Ist Nullwachstum ein realistisches Konzept zur Lösung des Weltbevölkerungsproblems? Allgemeines Statistisches Archiv, 1974. évi 2. sz., 176-197.p.
- (89) Vanistendael, S. : The Optimum Population Theory: An Appraisal for Policy Making. Bevolking en bezin, 1976. évi juliusi szám. (Holland nyelven)
- (90) Népeséggpolitika Magyarországon. Összeállította a KSH Népeségstatisztikai Főosztálya. A KSH Népeségtudományi Kutató Intézetének 35.sz. közleménye. Budapest, 1972/1. 105 p.
- (91) Bojarszkij, A.J. : Ob obratnoj zadacse obobascsonnoj teorii sztabilynovo naszelenija. In: Modeli demograficeszkih szvjazej. Sztatisztika, Moszkva, 1972. 6-13.p.
- (92) Valkovics, E. : De l'analyse des effets économiques de l'évolution démographique. In: Dossiers et recherches n° 1. I.N.E.D., 1976, 2-53.p.

TÁBLÁK JEGYZÉKE

	Oldal
1. 1. Egy változatlan halandóságu és létszámu zárt női népesség megoszlása életkor és családi állapot szerint	27
1. 2. Magyarország népességének 1959-1960. évi termékenységi alaptáblája	42
1. 3. A generációtávolság és a természetes szaporodás intrinsic arányszáma Magyarország női népessége 1959-1960. évi korszpecifikus termékenységi és halálozási arányszámait alapján számítva	46
1. 4. A reprodukciós együtthatók, a generációtávolság és a természetes szaporodás intrinsic arányszámának kiszámítása az Amerikai Egyesült Államok 1944. évi adatai alapján	50
1. 5. A reprodukciós együtthatók, a generációtávolság és a természetes szaporodás intrinsic arányszámának kiszámítása Lengyelország 1966. évi adatai alapján	52
1. 6. Az 1920-ban született franciaországi női generáció halandósági jellemzőinek és évi 1%-os szaporodási aránynak az alapulvételével becsült 0-9 éves stabil népesség kiszámításának sémája	53
1. 7. A bruttó és a nettó reprodukciós együttható kiszámításának sémája Albánia női népessége 1960-1961. évi halandósági és termékenységi jellemzői alapján	56
1. 8. A nettó reprodukciós együttható, a generációtávolság és a tényleges szaporodási arány értékének néhány kelet-európai szocialista ország 1960. körüli adatai alapján becsült alakulása	57
1. 9. Egy keletit-ípusu stabil női népesség és a hozzá tartozó stabil férfi népesség korstrukturája	63
1. 10. Egy mindkét nembeli stabil népesség nemek és kor szerinti összetételének meghatározása	65
3. 1. Stacionér népességek néhány jellemzője és az e jellemzők közötti főbb kapcsolatok Magyarország férfi népessége halandósági táblái alapján	198
3. 2. Stacionér népességek néhány jellemzője és az e jellemzők közötti főbb kapcsolatok Magyarország női népessége halandósági táblái alapján	199
3. 3. Néhány nevezetes életkor alakulása Magyarország férfi és női népessége halandósági táblái alapján	206-207
3. 4. A stacionér össznépességre, valamint a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív stacionér szubpopulációkra vonatkozó néhány becslési eredmény Magyarország férfi és női népessége halandósági táblái, valamint a gazdasági aktivitás (ill. inaktivitás) vonatkozó korszpecifikus arányszámait alapján	280-281
4.1/a. Az évi 5%-o-kal szaporodó, 77, 50 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusu stabil női népességben előforduló halálozások korstrukturájának a halandósági táblabeli halálozások korstrukturájává való átalakítása	358

4.1/b. Az évi 5‰-kel szaporodó, 72, 74 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil férfi népességben előforduló halálozások korstruktúrájának a halandósági táblabeli halálozások korstruktúrájává való átalakítása	359
4.2/a. A népességnek (ill. a leélt évek számának) az évi 5‰-kel szaporodó, 77, 50 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil női népesség halandósági táblabeli és tényleges korstruktúrája	360
4.2/b. A népességnek (ill. a leélt évek számának) az évi 5‰-kel szaporodó, 72, 74 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil férfi népesség halandósági táblabeli és tényleges korstruktúrája	361
4.3/a. Az élők és a meghaltak átlagos életkora kiszámításának előkészítése az évi 5‰-kel szaporodó, 77, 50 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil női népességben és annak halandósági táblájában	362
4.3/b. Az élők és a meghaltak átlagos életkora kiszámításának előkészítése az évi 5‰-kel szaporodó, 72, 74 évet kitevő születéskor várható átlagos élettartamu keleti-típusú stabil férfi népességben és annak halandósági táblájában	363
4.4. A szóban forgó keleti-típusú stabil női népesség és a hozzá tartozó stabil férfi népesség korstruktúrája	367
4.5. A stabil össznépességre, valamint a gazdaságilag aktív és a gazdaságilag inaktív stabil szubpopulációkra vonatkozó néhány becslési eredmény Magyarország férfi és női népessége három második világháború utáni halandósági táblája, valamint az általános termékenység és a gazdasági aktivitás (ill. inaktivitás) vonatkozó korspecifikus arányszámai alapján	382-385

ÁBRÁK JEGYZÉKE

	Oldal
I. 1. Zárt népesség kialakulásának sémája -----	14
I. 2. A népesség kicserélődése (R. Pressat nyomán) -----	39
I. 3. Az $A_1 B_1$ női születési kohorsz reprodukciója (R. Pressat nyomán) -----	40
I. 4. A különböző koruak éveleji számának és az elveszületések számának alakulása a t és a $t+1$ naptári években (L. Henry nyomán) -----	79
III. 1. A leélt évek három fő sokaságának ábrázolása a demográfiai hálózat módosított változatában -----	145
III. 2. ábra -----	146
III. 3. A leélt évek száma és naptára a különböző születési évjáratokban (generációkban) -----	147
III. 4. Zárt népesség kialakulásának bővített sémája -----	149
III. 5. A népmozgalmi események száma és naptára a különböző születési kohorszokban (generációkban) -----	152
III. 6/a. Az újszülöttek várható valószínű élettartama és halálozási kora Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halálozási táblája alapján -----	205
III. 6/b. A továbbélők és meghaltak száma különbségének $\left(l_x - \sum_{x=0}^{\bar{x}=\bar{x}} d_x \right)$ alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	208
III. 7. A továbbélők és a leélt évek számának megoszlása a meghaltak életkora szerint Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	210
III. 8/a. A továbbélők által még leélendő és a továbbélők és a meghaltak által már leélt évek száma különbségének $\left(T_x - \sum_{x=0}^{x=x} L_x \right)$ alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	215
III. 8/b. A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_0) három különböző alaku területre történő felosztása, melyek közül a továbbélők és a meghaltak által már leélt évek számát szemléltető terület azonos nagyságu a továbbélők által még leélendő évek számát szemléltető területtel Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	216

- III. 9/a. A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_O) három különböző alaku területre történő felosztása, melyek közül a továbbélők által már leélt évek számát szemléltető terület azonos nagyságu a meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek számát szemléltető területtel Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 218
- III. 9/b. A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_O) három különböző alaku területre történő felosztása, melyek közül a továbbélők által már leélt évek számát szemléltető terület azonos nagyságu a meghaltak által már leélt és a továbbélők által még leélendő évek számát szemléltető területtel Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 219
- III. 10. A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_O) három különböző alaku területre történő felosztása, melyek közül a meghaltak által már leélt évek számát szemléltető terület azonos nagyságu a továbbélők által már leélt és még leélendő évek számát szemléltető területtel Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 220
- III. 11/a. A továbbélők által még leélendő és az általuk már leélt évek száma különbségének ($T_x - x l_x$) alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 222
- III. 11/b. A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_O) három különböző alaku területre történő felosztása, melyek közül a továbbélők által már leélt évek számát és az általuk még leélendő évek számát szemléltető terület azonos nagyságu Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 223
- III. 12. A meghaltak által leélt évek számának $\left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right)$ alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 225
- III. 13/a. A továbbélők által még leélendő és a meghaltak által már leélt évek száma különbségének $\left[T_x - \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right) \right]$ alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 226
- III. 13/b. A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_O) három különböző alaku területre történő felosztása, melyek közül a meghaltak által már leélt évek számát és a továbbélők által még leélendő évek számát szemléltető terület azonos nagyságu Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 227
- III. 14/a. A továbbélők és a meghaltak által leélt évek száma különbségének $\left[x l_x - \left(\sum_{x=0}^{x=x} L_x - x l_x \right) \right]$ alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján 228

III. 14/b.	A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_0) három különböző alakú területre történő felosztása, melyek közül a meghaltak által már leélt évek számát és a továbbélők által már leélt évek számát szemléltető terület azonos nagyságú Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	229
III. 15/a.	Egy átlagos továbbélő által még leélendő és az általa már leélt évek száma különbségének alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	231
III. 15/b.	Egy átlagos továbbélő által még leélendő és az általa már leélt évek száma egyenlővé válásának néhány grafikus szemléltetése Magyarország férfi népessége 1959-1960. évi halandósági táblája alapján -----	232
III. 16/a.	A továbbélők által leélt évek számának ($x l_x$) alakulása a kor előrehaladásával Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	235
III. 16/b.	A továbbélési rend l_x görbéje és a koordináta tengelyek által határolt összterület (T_0) három különböző alakú területre történő felosztása azon életkor alapulvételével, melynek elérésekor a továbbélők által már leélt évek számát szemléltető terület maximális nagyságú Magyarország férfi és női népessége 1948-1949. évi, 1959-1960. évi és 1969-1970. évi halandósági táblája alapján -----	236
III. 17.	A népmozgalmi események élettartam alatti végső száma és naptára a különböző születési évjáratokban (generációkban) -----	244
III. 18.	A gazdasági események volumene és naptára a különböző születési kohorszokban (generációkban) -----	254
III. 19.	A gazdasági események élettartam alatti végső össz nagysága és naptára a különböző születési kohorszokban (generációkban) -----	256

A NÉPESSÉGTUDOMÁNYI KUTATÓ INTÉZET KÖZLEMÉNYEI SOROZATBAN
EDDIG AZ ALÁBBI KÖTETEK JELENTEK MEG:

1. Magyarország megyénkénti népességének várható alakulása, 1960. I. - 1980. I. között 1963/1.
2. A nyugdíjasok helyzete, 1963/2.
3. A korbevallás megbízhatóságának vizsgálata az 1960. évi népszámlálásnál, 1964/1.
4. Magyarország népességének demográfiai jellemzői régióként, 1965/1.
5. A válások okai, 1965/2.
6. A budapesti nyugdíjasok helyzete és problémái, 1965/3.
7. A társadalmi átrétegződés és demográfiai hatása, I. Budapesten és a városokban, 1965/4.
8. A népesség foglalkozásának változása 1960-1963 között, 1965/5.
9. Vizsgálatok a népesség területi eloszlásának alakulásáról Magyarországon, 1900-1960, 1966/1.
10. Lakásdemográfiai adatok, 1966/2.
11. A szociális intézetek és gondozottak helyzete, 1966/3.
12. Magyarország népességének területi előreszámítása, 1966/4.
13. A magyar leíró statisztika irány fejlődése, 1966/5.
14. Termékenységi adatok, 1966/6.
15. A demográfiai tényezők hatása a művelődésre, 1967/1.
16. Iskolai végzettség és szakképzettség, 1967/2.
17. Magyarország népességének gazdasági korfái, 1967/3.
18. Nemzetiségek demográfiai sajátosságai Baranya megyében, 1968/1.
19. Magyarország népességének előreszámítása, 1966-2001, 1968/2.
20. A magyar történeti demográfia a II. világháború után, 1968/3. (angol nyelven)
21. Történeti demográfiai kollokvium, Budapest, 1965, 1968/4. (francia, angol és német ny.)
22. Demográfiai jellemzők a települések nagyságcsoporthoz szerint, 1900-1960, 1968/5.
23. A Központi Statisztikai Hivatal Népeségtudományi Kutató Intézetének évkönyve, 1963-1968, 1968/6. (magyar és angol nyelven)
24. Alkoholizmus, 1968/7.
25. Gyermekgondozási segély, 1969/1.
26. Kutatási módszerek a termékenység és a családtervezés vizsgálatára: Magyar tapasztalatok, 1969/2. (angol nyelven)
27. Családtervezés Magyarországon. Az 1966. évi termékenységi és családtervezési vizsgálat (TCS) fontosabb adatai, 1970/1.
28. Gyermekgondozási segély, 1970/2.
29. 1966. évben egyetemi (főiskolai) felvételre jelentkezők demográfiai és testfejllettségi vizsgálata, 1970/3.
30. Társadalmi átrétegződés és demográfiai hatásai, II. Magyarországon, 1970/4.
31. Családtervezés Magyarországon. Az 1966. évi termékenységi és családtervezési vizsgálat (TCS) fontosabb adatai, 1970/1. (angol nyelven)
32. A IX. Biológiai Vándorgyűlésen elhangzott előadások tartalmi kivonatai. Budapest, 1970. május 6-8., 1970/6. (angol nyelven)
33. Magyarország népességének 1957 óta történt belföldi vándorlásának vizsgálata néhány szempontból, 1971/1. (angol nyelven)
34. Magyarország halandósági táblái 1900/01-től 1967/68-ig, 1971/2.
35. Népesedéspolitika Magyarországon, 1972/1.
36. Magyarország népességének előreszámítása (1972-2001), 1973/1.
37. Nemzetiségek demográfiai sajátosságai Baranya megyében. II., 1973/2.
38. Magyarország népessége, 1974/1. (angol nyelven)
39. A budapesti alkoholisták és leszármazottaik biodemográfiai vizsgálata (Első szakasz) (Előzetes jelentés), 1974/2.
40. Kriminálitási táblák, 1974/3.
41. A gazdasági korfák módszertani apparátusának felhasználása optimális stabil népességek meghatározására, 1974/4.
42. A társadalmi térbeliség néhány elméleti és gyakorlati problémája, 1975/1.
43. Népesedési kérdésekkel kapcsolatos közvéleménykutatás, 1976/1.
44. Budapesti öngyilkosok vizsgálata 1972, 1976/2.
45. Az 1-60 hónapos budapesti gyermekek testi fejlettsége, szociodemográfiai és morbiditási viszonyai (Előzetes jelentés), 1977/11.

46. A fiatal gyermekes özvegy nők helyzete, 1979/1.
47. A 16-29 éves fiatalok különböző gazdasági aktivitású csoportjainak helyzetét jellemző adatok, 1979/2.
48. A gyermekvállalásról és a népesedéspolitikáról alkotott vélemények több gyermeket gondozó anyák körében, 1980/I.
49. Magyarország népessége 1980-2021, 1980/2.
50. Budapesti 0 éves népesség demográfiai, egészségügyi és antropometriai vizsgálata, 1981/1.

Statisztikai Kiadó Vállalat
Felelős vezető: Kecskés József igazgató
Nyomdaüzem - 81-5852-11
Formátum: A/4 Terjedelem: 50, 5 (A/5) iv